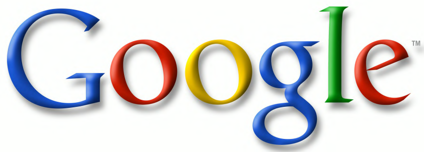
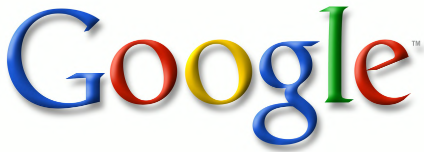




MÉTHODE GÉNÉRALE

D'INTÉGRATION CONTINUE

D'UNE

FONCTION NUMÉRIQUE QUELCONQUE

A PROPOS

DE QUELQUES THÉORÈMES FOURNIS PAR L'ANALYSE MATHÉMATIQUE
APPLIQUÉE AU CALCUL DES COURBES

D'UN

NOUVEAU THERMOGRAPHE

DEUX MÉMOIRES

PAR

MM. RAOUL PICTET et GUSTAVE CELLÉRIER

GENÈVE, BALE, LYON
H. GEORG, LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ
PARIS, GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS
1879

MÉTHODE GÉNÉRALE

D'INTÉGRATION CONTINUE

D'UNE

FONCTION NUMÉRIQUE QUELCONQUE

A PROPOS

DE QUELQUES THÉORÈMES FOURNIS PAR L'ANALYSE MATHÉMATIQUE
APPLIQUÉE AU CALCUL DES COURBES

D'UN

NOUVEAU THERMOGRAPHE

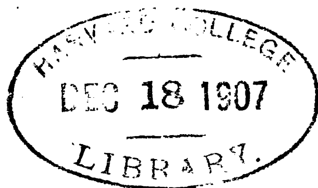
DEUX MÉMOIRES

PAR

MM. RAOUL PICTET et GUSTAVE CELLÉRIER

TIRÉ DES ARCHIVES DES SCIENCES DE LA BIBLIOTHÈQUE UNIVERSELLE
Avec l'autorisation de la Direction.

GENÈVE, BALE, LYON
H. GEORG, LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ
1879



GENÈVE.—IMPRIMERIE RAMBOZ ET SCHUCHARDT.

MÉTHODE GÉNÉRALE

D'INTÉGRATION CONTINUE

D'UNE

FONCTION NUMÉRIQUE QUELCONQUE

A propos de quelques théorèmes fournis par l'analyse mathématique appliquée au calcul des courbes

D'UN

NOUVEAU THERMOGRAPHE

INTRODUCTION

Il arrive fréquemment dans les recherches scientifiques qu'une étude, dirigée vers un but très-spécial, conduit peu à peu à des résultats entièrement inattendus et qui s'écartent totalement de la voie que l'on poursuivait.

C'est ce qui nous est arrivé dans l'étude d'une courbe particulière nécessaire à un thermographe dont nous donnons ci-après la description.

Cet appareil destiné à enregistrer les températures, doit conduire un crayon sur un papier entraîné par un mouvement d'horlogerie; la position du crayon est déter-

minée par les tensions maxima des vapeurs d'un liquide volatil.

Afin de rendre tous les degrés égaux, nous avons calculé une courbe de correction établie sur les principes de la cinématique.

Le problème semblait fort compliqué au début, mais, progressivement, les équations se sont singulièrement simplifiées et au moyen de la discussion analytique, il nous a été possible d'établir une formule générale embrassant tous les cas similaires qui peuvent se présenter. Supposant ensuite que deux courbes quelconques sont à une distance infinie et qu'elles obéissent aux conditions de solidarité spécifiées, plusieurs termes de l'équation générale s'annulent et les différentielles des variables indépendantes se répartissent d'une manière si heureuse que chaque membre de l'équation ne contient plus que les variables se rapportant à une des deux courbes.

Ce résultat est de la plus haute importance au point de vue du calcul intégral numérique; en effet, l'équation différentielle générale ayant à chaque membre des fonctions de variables *absolument séparées*, il est possible d'intégrer une fonction quelconque entre deux limites données au moyen d'une fonction auxiliaire dont l'intégration est connue.

Le premier membre de l'équation générale se rapportera à la courbe auxiliaire, le second à la fonction quelconque que l'on veut intégrer. L'intégrale définie que l'on obtiendra entre les limites fixées pour la première

courbe sera constamment égale en valeur numérique à l'intégrale de la seconde fonction.

Ainsi, par cette méthode et sans aucune mesure *plani-métrique,* on peut obtenir la valeur exacte numérique de fonctions réputées absolument non intégrables.

De plus toutes ces valeurs numériques peuvent être fournies *continuellement* par la lecture du mouvement linéaire d'un fil inextensible, lorsque ce fil s'enroule ou se déroule sur une courbe calculée d'après la fonction donnée.

La transmission des mouvements, dans son cas le plus général, est comprise dans l'étude analytique de ce problème.

Au moyen des méthodes indiquées, nous pouvons intégrer directement des fonctions comme celles-ci :

$$\int e^{\operatorname{tg} x}\, d\, x \text{ quand } x > 45^\circ$$

$$\int \cos x^2\, d\, x$$

$$\int \frac{e^x\, d\, x}{x}$$

$$\int \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x}\, d\, x \text{ lorsque } k > 1$$

Toutes les fonctions elliptiques, les exponentielles, les expressions de quelque nature qu'elles soient, deviennent

intégrables numériquement; il suffit simplement qu'aucun facteur, ni terme de l'expression ne soit *imaginaire*, ce qui entraîne nécessairement l'impossibilité matérielle d'un résultat numérique. Une remarque curieuse concernant également cette méthode générale d'intégration, c'est que tous les résultats sont ramenés à des *lectures linéaires*, bien qu'ils se rapportent à des variables multiples exprimant des surfaces ou des volumes.

Afin de permettre au lecteur de suivre facilement les raisonnements qui nous ont conduits aux résultats indiqués plus haut, nous partagerons ce travail en deux mémoires séparés.

Le premier sera intitulé : *Un nouveau Thermographe, sa théorie. Épure de sa courbe de correction.*

Le second aura pour titre : *Méthode générale d'intégration continue d'une fonction numérique quelconque. Application à la transmission de mouvements variés.*

Les deux mémoires se subdiviseront en chapitres correspondant à chacune des étapes naturelles au développement de ces sujets.

PREMIER MÉMOIRE

Un nouveau Thermographe, sa théorie. Épure de sa courbe de correction.

CHAPITRE I

Considérations générales.

Dans la plupart des phénomènes de physique et de chimie, la mesure exacte de la température et ses variations pendant un certain temps sont d'une importance majeure.

En météorologie, l'étude des variations de la température entre le jour et la nuit et pendant les diverses saisons de l'année, constitue la partie la plus essentielle des observations et permet la classification des différents climats du globe.

Pour mesurer les températures on se sert de *thermomètres*. Ces appareils, extrêmement nombreux et variés quant à leur forme et à la nature des substances employées dans leur fabrication, sont tous basés sur l'*obser-*

vation des changements de volume que subissent tous les corps quand on modifie la quantité de chaleur sensible qu'ils possèdent.

C'est uniquement par cette modification dans le volume que l'on constate la modification concomitante dans la *chaleur sensible* du corps.

Par cette expression *chaleur sensible* on entend exclure du mot chaleur la portion appelée *chaleur latente* consommée, soit par les forces moléculaires intérieures, soit par les forces extérieures qui exercent une pression sur la surface du corps et luttent contre une augmentation de volume.

Il résulte de cette méthode de mesurer les températures, qu'elle est basée sur *un simple postulat* que l'on peut exprimer ainsi :

Dans les corps choisis pour construire un thermomètre, on admet *que l'élévation de la température est proportionnelle au changement de volume.*

Par conséquent, une augmentation de volume double correspondra à une élévation de température double et ainsi de suite.

Les thermomètres à air, à mercure, à alcool, les thermomètres métalliques, les pyromètres, etc., etc., tous, sans exception, ne donnent les valeurs numériques des températures qu'au moyen de variations de volume lues directement *sur des divisions équidistantes.*

Dans cette manière d'envisager la mesure des températures, il est impossible de donner aucune définition claire et précise du mot *température.*

La seule qui soit logique est celle qui est tirée de la méthode *employée empiriquement* à sa mensuration. Mais alors ce mot reste dans un vague absolu et n'est plus que le corollaire du phénomène de la *dilatation.*

Une seule vérification permet d'admettre *dans une certaine mesure* que le postulat précité est exact, c'est-à-dire que des augmentations égales de chaleur correspondent à des augmentations égales de volume pour certains corps, c'est la méthode des mélanges dont M. Regnault a fait un grand usage.

Mais cette vérification, qui donne plus de confiance au point de vue numérique aux observations thermométriques, ne renseigne pas sur la corrélation nécessaire qui doit exister entre le volume d'un corps et sa température. Les anomalies sont fréquentes, nombreuses, habituelles même, et il est téméraire de fixer arbitrairement les limites entre lesquelles les observations doivent être jugées exactes.

Tout le monde connaît les anomalies de l'eau à partir de $+ 4^{\circ}$ jusqu'à 0°, puis sa cristallisation et sa brusque augmentation de volume.

Le mercure, près de son point de congélation, n'est plus comparable au thermomètre à air.

Quant à ce dernier instrument, on ignore encore totalement dans quelles limites il est exact puisqu'*aucun contrôle* n'est possible.

Lorsque la thermodynamique apparut, il y a quelque vingt ans, les deux théorèmes principaux, d'où décou-

lèrent une foule innombrable de conséquences et de découvertes heureuses, introduisirent la température comme un des facteurs principaux.

Le second principe mécanique de la chaleur n'est en somme qu'une définition déguisée de la température.

Laissant de côté la forme analytique sous laquelle cette proposition s'est présentée pour la première fois et l'interprétant en langage ordinaire on peut la traduire ainsi :

Si l'on a une quantité de chaleur Q disponible à une température $t' > t$ et qu'on fasse descendre cette quantité de chaleur de la température t' à la température inférieure t, il sera possible de transformer une partie seulement de cette quantité de chaleur en travail mécanique. Cette fraction maximum a pour expression :

$$Q \frac{t'-t}{t}.$$

En multipliant cette quantité de chaleur transformée par l'équivalent mécanique de la chaleur représenté par E, le travail disponible sera

$$Q \frac{t'-t}{t} E \text{ kilogrammètres.}$$

Le second principe mécanique de la chaleur fournit une relation simple d'une part : entre une certaine quantité de chaleur disponible à une température t' arbitraire, prise comme point de départ et de l'autre, entre le tra-

vail obtenu et la variation de la température de t' à t. Ainsi, si l'on connaît exactement la quantité de kilogrammètres obtenus dans une transformation de cette nature, il sera possible de déterminer la valeur de t en fonction de t', de E et de Q, chaleur disponible.

Cette relation, qui est de beaucoup la plus importante de la thermodynamique, ne donne pas malheureusement une *définition physique* de la *température,* elle ne fournit qu'une relation entre cet élément et un facteur kilogrammétrique.

Ce n'est pas ici le moment de développer cette question qui sera traitée d'ici à peu de temps dans un mémoire spécial[1] en voie de rédaction; seulement nous appuyons sur ce point important que la *température,* pour être rigoureusement mesurée, a besoin du contrôle du second principe mécanique de la chaleur. Ce sont donc des *mesures kilogrammétriques* qui doivent vérifier *des mesures de température.*

Sur les bases que nous venons d'exposer, nous avons étudié les changements d'état des liquides en vapeurs et la loi des tensions des vapeurs.

Ces phénomènes complexes donnent des relations numériques d'une grande précision entre les divers éléments qui constituent le problème calorifique.

Grâce aux belles expériences de M. Regnault sur les tensions maxima des vapeurs, les chaleurs spécifiques et

[1] Systèse de la chaleur. Étude sur la température.

les chaleurs latentes de presque tous les liquides, on possède un tableau numérique très vaste permettant de nombreuses vérifications des lois théoriques.

C'est au moyen de ce tableau que nous avons pu vérifier la formule générale suivante. Elle est déduite d'un cycle spécial, composé en vue de déterminer les températures par des mesures kilogrammétriques,

Appelant :

t' : une température arbitraire prise comme point de repère, soit l'ébullition de l'eau sous une pression de 760^{mm} de mercure, soit l'ébullition du soufre, etc.

t la température variable qu'on veut déterminer.

λ' la chaleur latente totale de volatilisation d'un liquide à la température t'.

P' la tension des vapeurs du liquide à t'.

P la tension des vapeurs à la température t.

c la chaleur spécifique du liquide.

k la chaleur spécifique des vapeurs du liquide.

$\frac{1}{274}$ le cœfficient de dilatation des gaz.

1,293 le poids d'un litre d'air à 0° et 760^{mm}.

δ la densité des vapeurs, variable suivant les pressions.

10333 la pression en kilogrammes sur un mètre carré correspondant à 760^{mm} de mercure.

431 [1] équivalent mécanique de la chaleur.

[1] C'est après avoir comparé plus de deux mille résultats fournis

La formule générale s'exprime par :

$$l\left(\frac{P'}{P}\right)=\frac{[\lambda'+(c-k)(t'-t)]\,431\times 1{,}293\,\delta\times 274(t'-t)}{10333\,[(274+t')^2-(274+t')(t'-t)]}.$$

Ou bien en simplifiant le dénominateur :

$$l\left(\frac{P'}{P}\right)=\frac{[\lambda'+(c-k)(t'-t)]\,431\times 1{,}293\,\delta\times 274\,(t'-t)}{10333\,(274+t')(274+t)}.$$

Cette formule donne la relation intime qui existe entre la pression P des vapeurs du liquide et la température correspondante *t*.

Le premier membre est le logarithme népérien du quotient

$$\frac{P'}{P}.$$

Le second membre n'est fonction que de *t* :

Ainsi, lorsque l'on connaît P par une observation directe, on déduit la température *t* par le calcul.

Si c'est *t* qui est donné numériquement, la formule fait connaître P.

Dans cette équation, on suppose connus plusieurs termes qui n'ont été déterminés que par l'emploi des thermomètres à mercure et à air. Ce serait donc un cercle vicieux que de déclarer leurs valeurs numériques

soit par le calcul, soit par les chiffres de M. Regnault que j'ai trouvé pour la valeur la plus probable de E le nombre 431 kilogrammètres. R. P.

comme absolument exactes. Cependant les vérifications faites au moyen de la méthode des mélanges sont suffisantes pour que ces nombres puissent être acceptés comme très voisins de leur véritable valeur.

Les *approximations successives,* dont l'emploi est absolument indiqué dans ce cas, permettent de corriger facilement les écarts numériques qui pourraient s'être introduits dans les valeurs de ces différents éléments.

On arrive ainsi à obtenir des résultats si précis numériquement et si constamment exacts, quels que soient les liquides étudiés, que l'on peut avoir une entière confiance dans la relation intime qui lie t et P.

Ainsi le problème de la *mesure des températures* au moyen de mesures kilogrammétriques est résolu.

La mesure des pressions P se ramène à la lecture des indications d'un manomètre, soit à la lecture d'une hauteur de mercure et la *température* devient un élément de même ordre qu'un poids, une longueur, une force dont la mesure est absolument facile et certaine.

Dans le mémoire auquel nous avons fait allusion, nous donnerons un détail complet de la partie analytique de ce problème et nous montrerons comment la *température* considérée comme la *longueur des oscillations calorifiques* est en relation intime avec les tensions maxima des vapeurs saturées.

Ici nous nous contentons de relater les résultats.

En appliquant cette formule aux tensions maxima de la vapeur d'eau entre les limites

$$+200° = t'$$

et

$$82° = t$$

le résultat fourni par la formule est presqu'identique à celui fourni par l'expérience.

Voici quelques chiffres :

P' pour l'eau à 200° = $11688^{mm},96$ (Regnault).

P à 82°. Calculé $384^{mm},51$. Observé $384^{mm},435$.

Il y a une différence de $0^{mm},075$ qui est inférieure aux erreurs d'observation provenant des thermomètres les plus sensibles.

Nous avons appliqué la formule générale aux liquides suivants :

L'éther sulfurique, l'éther iodidrique, l'éther méthylique, l'acétone, le sulfure de carbone, l'alcool, la benzine, le chloroforme, l'essence de térébenthine, l'ammoniaque, le chlorure de méthyle, la triméthyllamine, le mercure, l'acide sulfureux, etc., etc.

Dans tous ces exemples, la formule se vérifie avec une approximation plus grande que la limite d'erreur introduite par l'usage des thermomètres. Aussi, est-ce sur l'emploi de cette formule générale que *nous basons la mesure rationnelle des températures vraies.*

Dans le chapitre suivant nous décrirons l'appareil con-

struit dans le but de mesurer les températures, appareil que nous avons appelé *thermo-dynamomètre* à cause du principe sur lequel il repose, puis nous indiquerons les modifications apportées à cet instrument pour en faire un *thermographe* appliquable aux observatoires et aux stations météorologiques.

CHAPITRE II

Disposition et construction du Thermo-dynamomètre.

Dans le chapitre précédent, nous avons brièvement indiqué les considérations particulières qui nous ont conduits à la mensuration des températures au moyen des tensions maxima des liquides volatils.

Nous allons maintenant décrire les dispositions des appareils construits dans ce but et la manière de s'en servir dans les laboratoires et les stations météorologiques.

Ces instruments peuvent contenir un liquide volatil quelconque, pourvu qu'il satisfasse à différentes conditions pratiques.

1° Le liquide doit pouvoir s'obtenir chimiquement pur.

2° Le liquide volatil doit être stable malgré de fréquents changements d'état; il ne doit pas se polymériser.

3° Le liquide volatil doit être sans action chimique sur le mercure, ni sur le verre.

4° Le liquide doit être suffisamment volatil pour que les températures soient mesurées avec toute l'approxima-

tion désirable ; il ne doit pas l'être trop, afin de ne pas exiger des dimensions considérables aux tubes manométriques.

5° Il faut que l'on connaisse aussi exactement que possible la chaleur spécifique du liquide *c*, celle des vapeurs *k*, la chaleur latente λ' à une température t' prise pour base et la variation de la densité des vapeurs δ sous des pressions différentes, soit la valeur des *covolumes* de ces vapeurs.

Ces chiffres se corrigent très vite par les *approximations successives* au moyen d'un thermomètre étalon construit avec un liquide bien étudié, ou simplement par la réduction analytique de plusieurs séries d'observations.

6° Il est nécessaire que les vapeurs ne contiennent aucun gaz étranger et que les tensions manométriques ne soient influencées par aucune cause extérieure dont on ne pourrait pas tenir compte.

Jusqu'à présent, les seuls manomètres précis dont on se serve consistent en colonnes de mercure contenues dans des tubes en verre. La différence de hauteur entre les deux ménisques du mercure mesure la pression avec toute exactitude. Nous avons conservé ce système du manomètre, car c'est le plus simple et le meilleur.

Il nous est donc difficile de dépasser une température de 200 à 250 degrés centigrades sans introduire des facteurs étrangers provenant de la tension des vapeurs de mercure qui s'ajouterait à celle des vapeurs considérées, mais par contre, ainsi que nous le montrerons, il nous

sera possible de mesurer les températures les plus basses jusque vers — 160° à — 180°, sans avoir à redouter ni la congélation du mercure, ni aucune erreur dues aux contractions du verre.

Nous partageons en pratique l'échelle thermométrique en 5 parties, qui nécessitent chacune un instrument spécial, actionné par un liquide jouissant des propriétés sus-énoncées.

En commençant par les plus basses températures, voici le nombre des liquides utilisés.

1° de — 180° à — 100° mélange en parties égales d'acide carbonique et de protoxyde d'azote.

2° de — 100° à — 40° acide carbonique pur, ou protoxyde d'azote pur.

3° de — 40° à + 25° acide sulfureux anhydre pur.

4° de + 25° à + 90° éther sulfurique rectifié.

5° de + 90° à + 200° eau distillée.

Nous avons choisi pour chaque portion de l'échelle thermométrique un liquide dont les tensions maxima soient comprises entre $^1/_2$ et 10 atmosphères, limites que l'on peut admettre facilement en pratique.

Dans ces conditions, les écarts des ménisques se lisent aisément et les hauteurs de mercure sont données au $^1/_{10}$ de millimètre près sans difficulté.

Voici la disposition générale d'un thermo-dynamomètre :

Nous faisons souffler un long tube en verre représenté dans la planche I, fig. 1.

Ce tube est recourbé 2 fois sur lui-même dans la portion *a b c d*.

La partie *a b c* est destinée à contenir le mercure.

La partie *d* contient le liquide volatil et ses vapeurs.

Dans le renflement du tube en K se trouve le ménisque inférieur du mercure M. C'est sur ce ménisque qu'agissent avec une certaine pression les vapeurs du liquide volatil que l'on a introduit dans la branche *c d*. Le mercure monte dans la branche *a* et s'arrête en N de telle sorte que la hauteur cathétométrique N M mesure exactement la tension des vapeurs en *c d*.

Nous allons décrire sommairement la méthode suivie pour le remplissage de l'appareil.

On commence par réunir l'embouchure *e* du tube de verre avec une bonne machine pneumatique faisant le vide à un $^1/_2$ millimètre. On se sert d'un tube de caoutchouc attenant à un robinet à trois voies, placé juste au-dessus du tube en verre.

Pour empêcher le tube de caoutchouc de s'écraser, on y introduit une spire de fil de fer.

Le robinet à trois voies est fixé de telle sorte que sa branche inférieure communique avec le tube *a b c d*, sa branche horizontale avec la machine pneumatique et la branche supérieure avec un flacon ou une éprouvette contenant le liquide volatil que l'on veut introduire dans l'instrument.

Le raccord de ce flacon avec la branche supérieure du robinet se fait également par l'intermédiaire d'un tube de caoutchouc raidi par une spire métallique.

Ces préliminaires établis, on tourne le robinet à trois voies, de telle sorte que la machine pneumatique soit mise en communication avec le tube de verre. On fait le vide et l'on chauffe le tube dans toute sa longueur en promenant un bec Bunsen de haut en bas.

Cette opération a pour résultat de dessécher complètement le tube et de chasser tout l'air qu'il contient.

On prolonge ce dessèchement pendant plusieurs minutes.

On utilise ce temps pour remplir aux deux tiers environ le flacon qui doit contenir le liquide volatil.

On bouche ce flacon après le remplissage avec un bouchon de caoutchouc percé au milieu par un petit tube en verre sur lequel se fixe le tube de caoutchouc qui relie le robinet à trois voies avec le flacon.

Pour introduire le liquide volatil dans le flacon, il faut prendre quelques précautions, surtout si ce liquide est l'acide sulfureux ou le protoxyde d'azote.

On doit au préalable refroidir ce petit réservoir de verre pour que l'action frigorifique intense provoquée par ces liquides ne le fasse pas éclater ou se fendre.

La vapeur d'eau contenue dans l'air ne doit pas se déposer contre les parois internes du flacon, ce qui pourrait hydrater le liquide volatil.

Les manipulations diverses qu'exigent ces précautions multiples sont trop longues et trop minutieuses pour que nous nous y arrêtions ; nous nous contentons d'indiquer les conditions de l'expérience, conditions indispensables pour assurer l'exactitude de l'instrument.

Quand le tube de verre *a b c d* est entièrement desséché par l'action combinée du vide et de la chaleur, on tourne le robinet à trois voies de façon à faire communiquer la machine pneumatique avec les deux branches du robinet soit avec le tube en verre et le flacon bouché.

Immédiatement les vapeurs du liquide volatil envahissent la totalité du volume de ces conduits et remplacent l'air qui s'y trouvait auparavant.

Cette évaporation rapide du liquide volatil abaisse notablement la température du flacon et de son contenu, on voit apparaître une forte couche de givre sur les parois extérieures.

Le manomètre de la machine pneumatique indique la tension des vapeurs.

On isole de nouveau le flacon en tournant le robinet à trois voies, de telle sorte que le tube *a b c d* soit seul en communication avec la pompe, puis on fait le vide. Dès qu'on est arrivé à un vide d'un $^1/_2$ millimètre de mercure, on laisse rentrer les vapeurs dans le tube.

On répète plusieurs fois de suite ces manœuvres qui ont pour double résultat :

1° De chasser toute trace d'air de l'appareil en remplaçant ce gaz par les vapeurs du liquide volatil;

2° D'abaisser considérablement la température du flacon et du liquide volatil qui y est contenu.

Lorsque cette série d'opérations est terminée, on entoure la partie *d* du tube de verre de chiffons de coton que l'on arrose avec de l'acide sulfureux liquide.

Cette portion du tube se refroidit très rapidement à — 50°.

En répétant l'arrosage de temps à autre, on maintient cette température basse indéfiniment.

On tourne ensuite le robinet à trois voies de manière que le tube en verre *a, b, c, d* communique uniquement avec le flacon.

Voici dans ces conditions ce qui se passe :

Le flacon contient un liquide volatil à basse température, mais *moins basse* cependant que celle de la partie *d* du tube en verre.

L'air de l'appareil ayant été totalement chassé, le liquide du flacon va distiller et se condenser dans la partie inférieure de *d* en L.

La différence des tensions des vapeurs entre le flacon et L détermine cette condensation.

Le phénomène se passant à basse température, on réalise plusieurs conditions avantageuses :

1° La distillation étant lente, il n'y a point d'entraînement de liquide hors du flacon ;

2° La distillation se faisant à plusieurs degrés au-dessous de 0°, on fixe toute trace d'humidité (spécialement quand il s'agit de l'acide sulfureux et du protoxyde d'azote) ;

3° Le liquide volatil ne se dépose que dans la partie *d* du tube et n'entraîne ainsi aucune poussière, aucun corps étranger, ce qui arriverait infailliblement si l'on conduisait le liquide sans changement d'état du flacon à l'extrémité *d* ;

4° Les vapeurs qui se condensent en *d* correspondent donc aux vapeurs du liquide le plus pur qu'on puisse se procurer.

En ayant soin d'entretenir la basse température des chiffons qui entourent la partie *d* du tube, on arrive aisément à remplir presqu'en entier toute cette partie terminale du tube.

Quand on a obtenu ainsi 8 à 10 centimètres de liquide, on tourne le robinet à trois voies de manière à rétablir la communication du tube avec la machine pneumatique en excluant le flacon.

On dévisse le raccord supérieur du robinet à trois voies et on le remplace par un entonnoir en verre.

On verse dans cet entonnoir du mercure qui a été préalablement épuré, séché et filtré.

On fait le vide avec la machine pneumatique et quand la pression s'est fortement abaissée, on laisse descendre un peu de mercure dans le tube de verre, en prenant garde de tourner le robinet à trois voies du côté opposé à la pompe, pour éviter l'introduction du métal dans les conduits.

Cette première quantité de mercure qui descend dans la partie recourbée du tube de verre ferme la libre communication entre le liquide condensé en L et la portion A verticale.

Lorsque le mercure a rempli environ 20 centimètres du tube, on rétablit la communication avec la machine pneumatique, en excluant l'entonnoir.

En même temps, on enlève les chiffons qui entourent encore la portion *d*.

Au fur et à mesure que la température du liquide en L s'élève, sous l'influence du rayonnement extérieur, la tension des vapeurs augmente et le niveau du mercure tend à se modifier dans les deux branches *a*, *b* et *c*, *b*.

Dans la branche *a* le mercure monte, tandis qu'il baisse en *c b*.

Comme l'on n'a introduit qu'une petite quantité de mercure dans l'appareil, il arrive très vite que le niveau inférieur du mercure dans la branche *c*, *b* correspond avec le bas du coude en *b*.

Dès ce moment, les vapeurs peuvent monter dans la branche *a* sous forme de bulles et se dégager dans la chambre supérieure.

En faisant fonctionner la machine pneumatique, on enlève ces vapeurs au fur et à mesure de leur passage et on entretient la *seconde évaporation*.

En effet, le liquide qui s'était accumulé en L repasse à l'état gazeux et s'échappe au dehors en traversant une certaine épaisseur de mercure.

Cette seconde évaporation a pour but de donner une sécurité absolue dans l'exactitude de l'instrument. Toute trace d'air *doit avoir nécessairement disparu* lorsque le liquide contenu dans la branche *d* a été réduit à la vingtième partie du volume qu'il occupait au début.

Quand il ne reste plus dans la branche *d* que quelques millimètres du liquide, on tourne le robinet à trois voies et l'on continue le remplissage avec le mercure.

L'ampoule M K a été soufflée assez grande pour que sa capacité corresponde exactement au volume intérieur de la branche *a*.

On connaît donc d'avance le poids de mercure à introduire dans l'appareil pour que le niveau du ménisque dans la branche *a* puisse s'élever jusqu'au sommet *e* sans que le niveau M de l'autre branche s'abaisse au-dessous de l'ampoule.

Lorsque le remplissage est terminé, on peut faire bouillir le mercure dans la branche *a*, comme pour un baromètre, afin de chasser toute trace de gaz ou de vapeur qui aurait pu rester adhérente contre les parois du verre.

En mettant la branche *d* de l'appareil dans de l'eau à la température ordinaire, le mercure montera près du sommet *e* et il sera facile, tout en maintenant un vide presqu'absolu, de souder le tube aussi près que possible du ménisque supérieur du mercure dans la partie effilée.

Toutes les manœuvres que nous venons de décrire se rapportent plus particulièrement à la construction des thermo-dynamomètres à *acide sulfureux*. Pour les autres liquides on doit introduire de nombreuses variantes dictées par les différentes conditions où l'on se trouve; mais ce qu'il importe de noter c'est que la méthode générale que nous avons développée soit rigoureusement suivie.

On peut l'énoncer sous la forme suivante :

1° Le liquide volatil doit être introduit dans le tube en verre uniquement par voie de distillation ;

2° La distillation doit toujours avoir lieu aux tempéra-

tures les plus basses possibles, en tenant compte du rang que tient le liquide dans la série des liquides volatils;

3° Une *seconde distillation* sera toujours opérée pour chasser l'air qui pourrait rester dans l'appareil après la première opération.

Quand le tube *a, b, c, d* a été complètement rempli, ainsi qu'on vient de le voir, on le place contre un support en bois où il est solidement fixé par plusieurs pinces en caoutchouc durci. Il est maintenu de telle sorte que la branche *c, d* fait *complètement saillie* hors du support, la dernière pince étant placée tout près du sommet de la branche verticale *b, c.*

Deux règles graduées F G, H I sont vissées à côté des branches *a, b* et *b, c.*

Un fil à plomb et des vis calantes dont est muni le socle de l'appareil, permettent d'amener les graduations dans la position verticale.

Telles sont les dispositions générales d'un thermo-dynamomètre lorsqu'il est prêt à fonctionner pour des mesures de température.

Supposons que l'instrument dont nous allons nous servir soit destiné à mesurer des températures *plus basses* que la température ambiante, comprises entre + 10 et — 30°, par exemple, telles que celles qui correspondent à un mélange de glace pilée et de sel marin.

Nous prendrons le vase contenant le liquide dont on veut déterminer la température et nous le placerons sur un support, de telle sorte que toute la partie recourbée *d*

d'un thermo-dynamomètre à acide sulfureux plonge dans ce bocal et s'y trouve immergée.

La forme donnée au tube de verre et l'espace vide qui se trouve au-dessous de la branche *d* rend cette manœuvre très facile.

On suppose que les expériences se fassent dans un laboratoire dont la température moyenne est d'environ + 10 à + 15°. Ainsi le mercure et tout le matériel de l'instrument sont sensiblement à la même température plus élevée que celle du liquide sur lequel on opère.

Dès que les parois de la branche *d* sont refroidies au contact du liquide froid, elles condensent une portion des vapeurs contenues dans la *chambre thermique;* nous désignons sous ce nom l'espace compris entre la surface libre du liquide volatil et le ménisque du mercure en M.

La tension des vapeurs diminue aussitôt et l'on voit le mercure s'abaisser dans la branche *a* et monter dans l'ampoule K.

On a soin de remuer constamment le liquide froid qui est dans le vase afin d'égaliser la température de toutes les parties de l'enceinte et de mélanger les couches supérieures plus chaudes avec les inférieures plus froides.

Au bout de quelques minutes, le mercure est devenu stationnaire, son niveau N dans la branche *a* est fixe.

On lit la graduation correspondante à N sur l'échelle F G soit au moyen d'un cathétomètre, soit au moyen d'un T en métal muni d'un vernier que l'on fait courir sur l'arête vive de la graduation,

On lit de même la hauteur du ménisque M dans l'ampoule K.

La différence de ces deux lectures donne la valeur numérique de la tension P correspondant à la température cherchée t.

On n'a plus qu'à introduire la valeur de P dans l'équation générale dont tous les termes sont connus sauf la température cherchée. Elle reste comme seule variable indépendante et l'on obtient pour l'expression explicite la formule que nous allons déduire par le calcul suivant :

L'équation générale qui lie la pression P. à la température t est

$$l\left(\frac{P'}{P}\right)=\frac{[\lambda'+(c-k)(t'-t)]\,431\times 1{,}293\,\delta\times 274\,(t'-t)}{10333\,[(274+t')^2-(274+t')(t'-t)]}$$

Pour dégager t de cette équation lorsque P est connu numériquement, nous introduirons diverses simplifications.

Nous posons :

$$\theta=t'-t$$

$$\varepsilon=\frac{c-k}{\lambda'}$$

$$\tau'=274+t'$$

et

(1) $$m=\frac{\theta\,(1+\varepsilon\,\theta)}{\tau'-\theta}$$

d'où

$$m = \frac{10333\,(274 + t')\,l\left(\frac{P'}{P}\right)}{431\,\lambda' \times 1{,}293\,\delta \times 274}$$

On pose alors l'équation du second degré suivante :

$$\varepsilon\,\theta^2 + (1 + m)\,\theta = m\,\tau'$$

d'où l'on tire :

$$(2) \qquad \theta = \frac{1 + m}{2\varepsilon}\left[+\sqrt{1 + 4\varepsilon\frac{m\,\tau'}{(1 + m)^2}} - 1\right]$$

Dans la quantité entre parenthèses le radical a nécessairement le signe + car autrement aucune solution physique ne correspondrait à la fonction négative.

Si nous différentions la quantité :

$$\frac{4\,\varepsilon\,m\,\tau'}{(1 + m)^2}$$

par rapport à m, nous trouvons que sa valeur maximum s'obtient pour :

$$m = 1$$

Dans ce cas :

$$\frac{4\,\varepsilon\,m\,\tau'}{(1 + m)^2} = \varepsilon\,\tau'$$

Cette quantité est généralement plus petite que 1, donc *à fortiori* dans les cas où

$$m \gtrless 1$$

Cette remarque nous permet de développer la valeur de θ en série :

Posant

$$4\varepsilon \frac{m\tau'}{(1+m)^2} = \mu$$

et

$$\frac{m\tau'}{1+m} = \varphi$$

on obtient la série convergente suivante :

(3) $$\theta = \varphi\left[1 - \frac{1}{4}\mu + \frac{1.3}{4.6}\mu^2 - \frac{1.3.5}{4.6.8}\mu^3 + \dots\right]$$

et

(4) $$t = t' - \theta$$

Cette formule nous permet une rapide discussion du problème physique.

Si les quantités ε, m, t' sont des quantités positives, on aura généralement :

$$\theta > o$$

$$\theta < \frac{m}{1+m}\tau'$$

c'est-à-dire que :

$$t' > t$$

On en déduit également :

$$t' - t < \frac{m}{1+m}(274 + t') < 274 + t'$$

et que

$$274 + t > o$$

Ainsi les valeurs de t tirées de notre équation sont toujours plus élevées que — 274°, ce qui devait être.

Dans le cas où l'on pose :

$$m = o$$

on en déduit :

$$t' = t$$

et

$$P' = P$$

Enfin si $m = \infty$
on observe pour t

$$t = -274°$$

Cette discussion suffit pour prouver la nécessité d'admettre un *zéro absolu correspondant à une longueur d'oscillation calorifique nulle.*

Afin de permettre un grand nombre d'observations successives avec nos thermo-dynamomètres, sans être obligé de faire aucun calcul de réduction, nous avons tracé une

courbe à grande échelle des pressions P par rapport aux températures *t*. Cette courbe n'est que l'expression graphique de l'équation générale.

Les abscisses représentent les températures, les ordonnées, les pressions.

Dans cette courbe, nous avons tenu compte des variations de la densité δ des vapeurs en fonction des pressions.

Enfin une correction spéciale aux variations de la densité du mercure est introduite par une courbe auxiliaire.

Cette correction correspond aux variations de la température du laboratoire qui, dans les cas extrêmes, comprennent des écarts assez grands.

Nous devons faire ici une remarque essentielle sur la signification physique des chiffres obtenus par cette courbe : La température *t* déduite de notre équation est la valeur numérique *de la température la plus basse* des parois du tube *d* immergé dans le liquide froid.

Si ce liquide n'est pas bien mélangé et que des couches de température variable se superposent, la température donnée par le thermo-dynamomètre sera celle de la couche la plus froide qui est en contact avec la chambre thermique.

Cette propriété des liquides volatils et de leurs vapeurs en vase clos est trop connue pour que nous insistions davantage sur ce sujet.

Nous voyons par là que, quelle que soit la température basse à mesurer, le mercure n'en sera nullement in-

fluencé ; il conserve sa température normale égale à celle du laboratoire, et ne risque en aucun cas de se congeler.

Les modifications dans la structure moléculaire du verre, sous l'action de très grands froids et de changements de température réitérés, n'ont également aucune influence sur les lectures cathétométriques qui seules sont consultées.

Lorsque l'on a à mesurer des températures supérieures à la température ambiante, comprises entre + 20 et + 70°, on se sert des autres thermo-dynamomètres contenant de l'éther sulfurique ou de l'eau distillée.

Il faut seulement dans ce cas introduire une modification indispensable à l'instrument tel que nous l'avons décrit.

Toute la partie *b c* et en particulier l'ampoule K et la branche *c* doivent être maintenues artificiellement à une *température supérieure* à celle que l'on veut mesurer.

On arrive facilement à ce résultat en immergeant toute la portion inférieure de l'instrument dans un vase de cristal que l'on remplit d'eau chaude ou d'huile chaude suivant les cas et que l'on renouvelle de temps en temps.

De cette manière la chambre thermique se partage en deux parties, l'une : l'ampoule et la branche *c* à une température constamment élevée ; l'autre l'extrémité *d* à une température moins haute.

Dans ces conditions, la distillation du liquide L sur le mercure ou contre les parois est impossible, et de plus la

hauteur cathétométrique correspond uniquement à la température de *d* que l'on veut déterminer.

Pour relier entre eux tous ces instruments qui se partagent toute l'échelle des températures depuis + 200° jusqu'à — 180°, nous les avons disposés de telle sorte qu'ils enjambent tous un peu les uns sur les autres ayant des parties communes.

Les divisions inférieures d'un thermo-dynamomètre à eau correspondent aux divisions supérieures du thermo-dynamomètre à éther et ainsi de suite.

En faisant des observations simultanées avec deux instruments, on obtient des valeurs de *t identiques* par les deux lectures manométriques.

Ces deux instruments accusent cependant des dénivellations du mercure extrêmement différentes, mais la valeur de *t* est obtenue par deux chemins qui convergent au même point, ce qui doit être si le principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur est absolument vrai.

Pour la *sensibilité*, condition des plus importantes, ces instruments la possèdent avec exagération même, si l'on peut redouter un excès en ce genre.

Quelques chiffres suffiront pour le prouver.

Entre + 10° et + 20°, la différence cathétométrique du mercure pour 1 degré centigrade correspond environ à 10 centimètres, dans un appareil à acide sulfureux.

Avec un vernier, on lit aisément le $^1/_{10}$ de millimètre, ce qui équivaut au millième de degré!

Dans les plus basses températures, on a comme limite de sensibilité le deux centième de degré.

Dans les températures supérieures, on arrive au $^1/_{5000}$e assez facilement.

Une expérience facile à faire pour démontrer la sensibilité de ces instruments consiste à placer un thermo-dynamomètre dans une chambre, de telle sorte qu'on puisse lire la hauteur du mercure sur la division F G au moyen d'une lunette fixée derrière la porte fermée de la chambre.

Quand on a fait plusieurs lectures, on entre dans la pièce et sans perdre de temps on va à l'instrument pour opérer une nouvelle lecture. Elle ne correspond plus à la précédente, la chaleur due au rayonnement du corps a suffi pour produire une dénivellation sensible du mercure de 1 à 2 millimètres, quelquefois plus.

Pour que cette expérience réussisse, il faut que la branche *d* soit dans l'air. Si elle était plongée dans un liquide, tout mouvement du mercure serait paralysé.

En comparant ces thermo-dynamomètres aux thermomètres actuellement en usage, nous pouvons établir le parallèle suivant :

THERMOMÈTRES	THERMO-DYNAMOMÈTRES
1° Les thermomètres sont basés sur un postulat scientifique qui n'est qu'imparfaitement vérifié par la loi des mélanges.	1° Les thermo-dynamomètres sont basés sur le second principe mécanique de la chaleur.
2° Les températures sont mesurées par des changements de volume.	2° Les températures sont mesurées par des hauteurs de mercure.
3° Toute irrégularité dans le calibre des tubes thermométriques est une cause d'erreur qui intéresse toutes les valeurs numériques de l'instrument.	3° Les températures sont entièrement indépendantes du calibre des tubes manométriques si l'on tient compte de la capillarité.

4° Dans tous les thermomètres à alcool, à mercure et à air les modifications moléculaires des parois des réservoirs changent le volume intérieur et déplacent le zéro.	4° Les températures sont indépendantes totalement des modifications moléculaires des réservoirs et des changements de volume des capacités intérieures.
5° Pour les basses températures, on extrapole sans aucun contrôle les indications des instruments.	5° Les températures sont rigoureusement données quelque basses qu'elles soient.
6° Il est difficile d'atteindre sûrement une approximation égale à $^1/_{20}$ de degré centigrade dans les limites ordinaires des observations.	6° Il est facile d'arriver au $^1/_{500}$ de degré dans toute l'étendue de l'échelle thermométrique comprise entre + 200° et — 180°.
7° Les thermomètres à air peuvent donner des indications assez précises jusqu'à + 500°.	7° Il est à peu près impossible de dépasser 250° sans rencontrer de grandes difficultés en pratique.

Nous donnerons avec tous les détails nécessaires les courbes correspondant à chaque thermo-dynamomètre ainsi que les calculs des approximations successives dans le mémoire que nous avons annoncé sur l'Étude de la température.

Dans ces pages, nous avons voulu seulement décrire ces instruments et la théorie sur laquelle ils ont été construits.

Chapitre III

Le Thermographe.

Dans le chapitre précédent nous n'avons parlé que des thermo-dynamomètres de laboratoire pouvant servir de *thermomètres étalons* dans toutes les expériences où une très-grande exactitude est nécessaire.

Nous avons légèrement modifié cet appareil pour le

rendre apte à l'enregistrement automatique des températures, afin qu'il puisse servir, soit aux observations météorologiques soit aux observations de longue haleine dans les cabinets de physique.

C'est cet instrument modifié qui s'appelle *thermographe*. Nous l'avons représenté par un dessin schématique dans les figures 2 et 3 de la planche I.

Pour se rendre un compte exact des détails essentiels de sa construction, supposons que nous ayions un thermodynamomètre à acide sulfureux du modèle décrit dans le chapitre précédent.

Nous cassons la pointe effilée du tube *a, b, c, d* (fig. 1) en *e*, extrémité qui avait été soufflée au chalumeau à la fin des opérations de remplissage.

Dès que la pression atmosphérique pénètre dans le tube et agit sur le mercure, celui-ci descend et occupe une nouvelle position fixe après quelques oscillations.

Cette position diffère de la précédente de la hauteur barométrique en la station où se trouve l'instrument.

A part cette différence le niveau du mercure suivra toutes les oscillations dues aux changements de la température de la branche *d* comme si le vide avait été maintenu sur le ménisque supérieur N dans la partie *a* du tube.

Ainsi, si la pression atmosphérique ne variait pas, on n'aurait au bord de la mer qu'à ajouter 760 millimètres à la valeur de P observée pour avoir la tension exacte des vapeurs à toute température.

Mais la pression atmosphérique varie; il faut voir quelle est son influence sur les indications de l'appareil.

Si nous plongeons la branche *d* dans de la glace fondante et que nous prenions la position N du ménisque correspondant à la pression atmosphérique normale, il nous est facile d'observer les deux relations suivantes entre les mouvements du baromètre et ceux du thermo-dynamomètre :

1° Si le baromètre *monte* de *n* millimètres, le ménisque du thermo-dynamomètre *baissera* de *n* millimètres ;

2° Si le baromètre *baisse*, le thermo-dynamomètre *monte* d'une même quantité.

Telle est l'influence des variations barométriques dont l'explication est évidente.

Il faudra donc toujours, si l'on veut une grande précision dans l'évaluation des températures, tenir compte des changements de la pression atmosphérique.

Dans nos climats, les variations extrêmes de la température peuvent être comprises entre les limites — 20° et + 40°.

Il est si rare qu'elles dépassent ces valeurs qu'un enregistrement automatique peut se borner à rester dans ces limites.

Entre ces deux températures extrêmes — 20 et + 40 le niveau du mercure dans la branche *a* subit une dénivellation de 4211,04 millimètres, c'est-à-dire plus de 4 mètres et vingt centimètres.

Une ascension aussi considérable dans le tube vertical permettra facilement l'enregistrement automatique des températures.

Il suffit pour cela de donner au tube manométrique un diamètre suffisant et de faire flotter à la surface du mercure un flotteur de fer.

Ce flotteur entraînera un fil dont l'autre extrémité conduira l'appareil enregistreur.

Voici du reste l'explication des figures schématiques 2 et 3 de la planche I qui représentent l'instrument.

Dans la figure 2 (élévation) le tube manométrique est représenté en E B N A. Nous n'avons dessiné que la portion supérieure.

Le niveau du mercure arrive en N. Le flotteur B est un petit cylindre de fer poli alézé avec un millimètre de jeu dans le tube manométrique.

Un fil métallique C s'attache au flotteur B et s'enroule sur un tambour de 26 centimètres de diamètre T.

Ce tambour est fixé sur un axe OO′ (fig. 2, Plan) de telle sorte que la verticale, tangente à la circonférence, passe par l'axe du tube manométrique.

En plan le tube A B E se projette sur une circonférence dont le centre correspond au bord extérieur du tambour T.

Le fil C après s'être enroulé sur la circonférence de T descend verticalement de l'autre côté et supporte un contre-poids B′ égal à B.

L'axe de rotation OO′ du tambour T tourne très librement sur galets de manière à éviter presqu'entièrement les frottements.

Entre les écarts de température sus-mentionnés, le fil se

déroulera sur une longueur de plus de 4 mètres et fera faire environ 5 révolutions $^1/_2$ au tambour T.

On ne peut pas songer à enregistrer en *grandeur naturelle* des déplacements aussi considérables, il faut nécessairement les réduire.

On doit discuter d'abord l'*échelle de réduction* et la *méthode de réduction.*

Nous avons vu que les variations de *t* n'entraînent pas des variations égales de P, mais des variations implicitement contenues dans l'équation générale.

Ainsi entre — 5° et — 4°, le mercure monte de 41,11 millimètres; entre + 35° et + 36 l'ascension est de 125,5 millimètres.

Pour une différence de 1 degré dans la valeur de *t*, les ascensions du mercure peuvent varier du simple au triple suivant une fonction continue.

Il résulte de cette circonstance que si l'on se contente de réduire purement et simplement le mouvement du mercure et à l'enregistrer tel quel, les degrés marqués par le crayon ne seront pas égaux.

Dans les basses températures, les distances entre deux degrés consécutifs seront courtes; pour les températures plus élevées, ces distances seront considérablement plus accusées.

Nous nous sommes en conséquence proposé de rendre tous les degrés égaux au moyen d'une courbe auxiliaire de réduction, de manière à annuler ces différences dans la valeur linéaire des degrés.

De plus, considérant qu'en pratique, si l'on adopte 1 centimètre pour représenter 1 degré, on obtient une exactitude suffisante, qu'on peut sans difficulté enregistrer sur du papier large de 60 centimètres correspondant aux 60 degrés compris entre les limites extrêmes de la température, nous en déduisons les valeurs numériques des dimensions de l'appareil enregistreur.

Voici le détail de cet instrument :

Sur le tambour T qui est conduit par le fil C et sur le même axe O O′, nous fixons une *fusée* S destinée à recevoir un autre fil C′.

Cette fusée est calculée de telle sorte que le fil C′ se déroule de quantités égales pour d'égales variations de t; chaque degré de l'échelle centigrade correspondant à une des valeurs successives de t.

Les plus grands rayons de la spire développent le fil lorsque la température est basse.

Au fur et à mesure que la température t s'élève, le rayon de la fusée diminue.

Cette courbe correctrice, dont le calcul sera donné dans le chapitre suivant, est entièrement aplatie, c'est-à-dire qu'on a donné au pas la plus petite valeur possible.

Cette disposition permet une grande précision dans la construction de cette spire, d'après les résultats du calcul, et n'augmente que faiblement le poids du tambour T muni de cette fusée.

Le fil C′, qui s'enroule sur la fusée S, passe sur la gorge d'une roulette R. De là le même fil passe sur une

seconde roulette G, puis sur une troisième H. Enfin l'extrémité du fil C′ s'attache à un petit contre-poids P.

Entre les deux roulettes G et H, le fil est horizontal. C'est dans cette portion que se font les enregistrements.

Pour cela le fil entraîne un crayon soutenu dans une gaîne F. Ce crayon se promène sur un papier large de 60 centimètres, mu constamment par un mouvement uniforme dans une direction perpendiculaire au plan du dessin (fig. 2 élévation).

Le mouvement d'entraînement du papier est produit par un mécanisme d'horlogerie régularisé par un pendule.

Nous avons adopté comme vitesse de développement le rapport de 1 centimètre pour une heure.

Ainsi la température de chaque jour sera représentée par une courbe tracée sur 24 centimètres de longueur.

Dans la figure nous n'avons indiqué que la roue V commandée par le mouvement d'horlogerie. C'est cette roue qui actionne le papier de l'enregistreur.

Un crayon fixé au support de l'instrument marque constamment le 0°, de telle sorte que les valeurs absolues de la température sont données par une simple lecture millimétrique.

Comme le mouvement du crayon n'est en tout que de 60 centimètres, tandis que les dénivellations du mercure atteignent 4 mètres 20, les amplitudes sont réduites et les frottements deviennent très faibles, ce qui permet d'obtenir une grande sensibilité dans les indications marquées sur le papier.

Les temps perdus sont presque nuls.

Comme cet instrument est destiné à enregistrer les températures de l'atmosphère extérieure aussi bien que celles des liquides contenus dans des chambres closes, nous avons dû modifier le dispositif de la chambre thermique des thermo-dynamomètres.

Ordinairement, les thermomètres dont on se sert dans les observatoires, pour relever les températures de l'air, sont placés à une certaine distance de l'édifice, afin de les soustraire à l'influence d'une habitation plus ou moins chauffée.

On peut entourer ces thermomètres de cloisons à jour, suffisantes pour éviter l'action directe des rayons solaires et permettant cependant, soit au vent, soit aux courants d'air, de donner à ces instruments la température *de l'air à l'ombre.*

Pour que le thermographe fournisse des indications absolument comparables à celles de ces thermomètres, il est nécessaire que la chambre thermique soit placée dans les mêmes conditions.

Cette nécessité, dictée par la nature même des observations à faire, nous a obligés à changer la construction du réservoir à acide sulfureux dont les tensions seront enregistrées par le thermographe.

Toute la partie de l'appareil, composée des pièces représentées dans la figure 2 est installée dans l'intérieur de l'observatoire, à l'abri du vent et des intempéries.

Le bas du tube E A est mastiqué dans une douille en fer terminée par un petit raccord à pas de vis.

Sur ce raccord on fixe solidement l'extrémité d'un long tube en fer, tel qu'on sait aujourd'hui les construire pour les besoins industriels.

Ces tubes sont d'un petit diamètre ce qui les rend souples; de plus ils peuvent résister à de fortes pressions sans se rompre.

M. Cailletet les a employés avec succès dans son appareil pour la liquéfaction des gaz permanents où les pressions ont atteint 300 atmosphères.

Ce long tube de fer, à partir de l'extrémité inférieure de la colonne manométrique, se déroule hors du bâtiment jusqu'aux petites constructions volantes où s'abritent les instruments météorologiques.

On enfouit ce tube sous terre pour éviter les accidents traumatiques qui pourraient facilement survenir sans cette précaution, et après l'avoir posé comme un tube de gaz, on en relève l'extrémité terminale dans la cage des thermomètres.

Dans la figure 3 (Planche I) nous représentons ce long tube de fer par U.

Cette extrémité du fil se soude à un réservoir de fer ayant la forme d'un cylindre placé verticalement. On alèze l'intérieur de ce cylindre pour lui donner un diamètre rigoureusement égal partout.

Ce réservoir a une capacité variable suivant les circonstances, mais il convient de lui donner environ 400 à 500 centimètres cubes.

Voici du reste son emploi et les conditions qui règlent ses dimensions :

Ce réservoir est destiné à recevoir soit le mercure, qui permettra l'ascension du flotteur dans le tube manométrique de l'observatoire, soit l'acide sulfureux liquide dont les tensions indiqueront la température extérieure de l'air.

Il faut donc nécessairement que la capacité de ce réservoir *soit au minimum égale* à la capacité de la colonne manométrique.

Si l'on suppose que cette colonne ait 12 millimètres de diamètre intérieur, son volume pour une dénivellation de $4^{m},20$ sera de 420 centimètres cubes environ.

De plus, il doit y avoir une chambre thermique dont la capacité ne peut pas être trop réduite; ainsi en donnant 500 centimètres cubes au réservoir, on se trouve dans de bonnes conditions.

Au sommet de ce cylindre réservoir se trouve un bouton à vis, capable de faire un joint hermétique par l'écrasement d'une rondelle métallique.

C'est par cet orifice que l'on pratique l'introduction du mercure et du liquide volatil.

On transporte dans l'observatoire une pompe pneumatique et l'on établit une communication entre le sommet du tube manométrique et cette pompe.

Cette disposition permet de faire le vide dans toute la canalisation.

Un grand entonnoir de verre est fixé sur l'orifice supérieur du réservoir cylindrique au moyen d'un tube de caoutchouc que l'on peut étrangler à volonté.

On remplit l'entonnoir de mercure parfaitement propre,

sec et bien filtré, en ayant soin pendant ce remplissage d'étrangler le caoutchouc qui ferme l'entonnoir à sa pointe.

Pendant ce temps, on fait le vide dans toute la canalisation au moyen du jeu de la pompe pneumatique.

Lorsque le vide est suffisant, on ouvre en plein la communication qui permet au mercure de descendre dans le réservoir cylindrique; le niveau baisse rapidement dans l'entonnoir, mais on verse constamment du mercure pour empêcher l'air extérieur de pénétrer avec le métal dans le cylindre.

Grâce à ces manœuvres, le mercure envahit toute la canalisation sans laisser de poche à air sur son parcours. On le voit bientôt apparaître dans l'observatoire à une certaine hauteur dans la colonne manométrique.

On laisse alors rentrer l'air par la pompe pneumatique et l'on enlève l'excès de mercure introduit dans le réservoir cylindrique.

Pour que ces opérations soient commodes et même réalisables, il est essentiel de connaître au préalable la hauteur relative du réservoir extérieur et de la base de la colonne manométrique.

Au moyen de quelques coups de niveau, on sait d'avance quelle sera la hauteur approximative du mercure dans la colonne manométrique lorsque le mercure aura pris son niveau dans les deux appareils.

La pression atmosphérique ordinaire correspond à la tension maximum des vapeurs d'acide sulfureux à — 10°.

Par conséquent, la limite minimum inférieure, qui sera atteinte par le mercure à une température extérieure égale à — 20° sera au plus à 30 centimètres plus bas.

Cette première constatation permet de connaître déjà sûrement les limites supérieure et inférieure des oscillations du mercure dans l'observatoire.

Dans le réservoir cylindrique, on laissera un vide d'environ 100 à 150 centimètres cubes au-dessus du ménisque M du mercure (fig. 3). Ce sera la capacité de la chambre thermique correspondant à — 10°.

Pour l'introduction de l'acide sulfureux, on se sert d'un siphon rempli de ce liquide volatil; au moyen d'un petit tube de verre pénétrant dans l'intérieur de l'appareil, on injecte une certaine quantité de ce corps.

Immédiatement l'ébullition de l'acide liquide chasse tout l'air qui se trouvait sur le mercure.

Quand on juge que l'acide sulfureux remplit seul la chambre thermique, ce qui arrive presqu'instantanément, on visse à bloc le bouchon métallique et l'instrument est prêt à fonctionner.

Il est avantageux de déterminer expérimentalement le 0° correspondant à la glace fondante afin d'avoir un point de repère invariable, permettant la comparaison avec tous les autres thermomètres.

Pour cela on entoure le réservoir cylindrique d'un manchon fermé dans sa partie inférieure par une membrane de caoutchouc qui fait joint.

On remplit ce manchon de glace pilée que l'on ali-

mente et renouvelle pendant plusieurs heures, afin d'être sûr que la température 0° soit bien atteinte.

Quand le ménisque N du mercure est stationnaire dans l'observatoire, on trace un trait correspondant à sa position sur la graduation cathétométrique.

Ce trait permet de fixer un crayon permanent qui donnera le zéro sur le papier roulant de l'enregistreur.

Étant données toutes ces dispositions, la coupe du réservoir cylindrique est représentée dans la figure 3 :

En M on voit le mercure, qui occupe un peu plus de la moitié de la capacité intérieure du réservoir.

Au-dessus du ménisque se trouve une petite épaisseur du liquide volatil I qui est variable suivant les cas et la méthode employée pour le remplissage.

Enfin la chambre thermique est représentée en K. C'est l'espace occupé par les vapeurs saturées d'acide sulfureux.

Les Corrections.

Ainsi que nous l'avons dit précédemment, les variations de la pression atmosphérique modifient, en sens inverse et d'une quantité égale numériquement, les oscillations du mercure dans la colonne manométrique du thermographe.

Il est donc nécessaire de tenir compte de ces perturbations et d'estimer l'importance qu'elles ont dans la mesure des températures.

En examinant les courbes données par les indications du baromètre, on voit que ***bien rarement*** les oscillations du mercure dépassent 2 centimètres au-dessus ou au-dessous de la position normale. Ces écarts même sont anormaux et ne se présentent qu'à de longs intervalles.

Si nous admettons que le thermographe soit réglé à 0° centigrade sous la pression normale, les plus grands écarts dont il faudra tenir compte s'expriment par

$\pm$ 20 millimètres.

Les variations du baromètre dans ces limites sont sensiblement indépendantes des saisons, du jour, de la nuit et des moyennes des températures.

Ainsi ces écarts représenteront une perturbation dans la lecture des températures plus grande dans les saisons froides que dans les saisons chaudes. Dans celles-ci un degré centigrade correspond à environ 10 centimètres d'élévation du mercure, dans celles-là à 7 centimètres seulement.

Si donc l'on ne corrige pas l'influence des variations barométriques, l'erreur qui entache les chiffres obtenus sera comprise entre

0 et $\pm \frac{1}{5}$ de degré en été

et entre

0 et $\pm \frac{2}{7}$ en hiver.

Il faut cependant ajouter que les moyennes mensuelles

ne seront jamais affectées d'écarts aussi grands, car les fortes dénivellations du baromètre sont toujours de courte durée.

Pour tenir compte exactement des variations perturbatrices du baromètre, il suffit d'établir un *barographe* qui trace lui-même sur le papier du thermographe les oscillations de la pression atmosphérique.

On dispose cet enregistrement de telle sorte que les oscillations positives du baromètre s'enregistrent négativement, mais en grandeur naturelle sur le papier.

Un système très simple de réduction donne alors, au moyen d'une lecture tabulaire, la valeur exacte de la température avec toute l'approximation désirable [1].

Une seconde correction qu'il est nécessaire d'apporter dans cet appareil, de même que dans le thermo-dynamomètre, provient de la variation de la densité du mercure suivant la température de l'observatoire.

Ces corrections sont identiques à celles connues sous le nom de : hauteur ramenée à 0° et ne présentent aucune espèce de difficulté.

Enfin on peut se demander quelle espèce de perturbation produirait une petite quantité d'air emprisonnée dans la chambre thermique avec l'acide sulfureux.

Nous constaterons d'abord que cette quantité sera tou-

[1] On peut aussi tenir compte des variations de la pression atmosphérique due à la dénivellation du ménisque supérieur N. Le maximum des écarts, soit $4^m,20$, correspond à environ 0,4 millimètre, soit $^1/_{800}$ de degré.

jours excessivement, minime si l'on procède au remplissage ainsi que nous l'avons exposé.

Nous avons fait une série de recherches avec des thermo-dynamomètres, dans lesquels nous avons laissé un peu d'air dans la chambre thermique. Ces expériences nous ont conduit à ce résultat :

Si l'on met deux thermo-dynamomètres, l'un sans air, l'autre avec un peu d'air au 0° centigrade, et qu'on mesure exactement la hauteur du mercure, on lit deux hauteurs différentes dans les deux instruments.

Dans le 1er la hauteur est égale à P.

Dans le 2e la hauteur est égale à $P + h$.

h représente donc l'action manométrique de l'air enfermé dans la chambre thermique.

Si nous plaçons ces deux mêmes instruments dans de l'eau à + 20° par exemple nous trouvons :

Pour le 1er une hauteur P'.

Pour le 2e une hauteur $P' + h$.

h dans cette seconde expérience est exactement égal à h dans la première.

Il est cependant à noter que h doit toujours être très petit, car dès que sa valeur devient plus grande, égale à 35 ou 40 centimètres de mercure, la hauteur h donnée par les lectures aux différentes températures selon la méthode précédente, n'est plus constante mais va constamment en diminuant.

Ainsi dans le thermographe, où l'on peut être certain que la quantité d'air emprisonné dans l'appareil est très faible, on pourra aisément déterminer la valeur de

$$P^{\circ} + h \text{ à } 0^{\circ}$$

qui servira de point de repère fixe pour la mesure de toutes les températures.

Une dernière correction, dont on tient compte du reste dans la construction de la courbe hélicoïdale S (Planche II, fig. 2), consiste dans l'estimation de la hauteur absolue des colonnes de mercure en fonction des températures et des diamètres : soit de la colonne manométrique placée dans l'observatoire, soit du réservoir cylindrique fixé au dehors du bâtiment.

En effet l'enregistreur ne marque que les dénivellations du mercure dans la colonne manométrique, tandis que les hauteurs réelles sont représentées par la *somme des dénivellations* dans les deux endroits.

En appelant :

H la dénivellation mesurée dans l'observatoire ;

h la dénivellation dans le réservoir cylindrique, on a comme valeur numérique le P correspondant à la température t° l'équation :

$$P = H + h.$$

D'un autre côté si l'on représente par :

$$R = \text{rayon du réservoir cylindrique}$$

et par

$$r = \text{rayon de la colonne manométrique}$$

les surfaces de ces cylindres seront entre elles dans le rapport :

$$\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2}$$

Les dénivellations dans les deux cylindres correspondant à un même volume seront en raison inverse des sections, ce qui nous donne la relation :

$$\frac{h}{H}=\frac{r^2}{R^2}$$

d'où l'on tire :

$$Hh=\frac{r^2 H}{R^2}$$

et la valeur numérique de P devient :

$$P=H+\frac{Hr^2}{R^2}$$

ou

$$P=H\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)$$

C'est au moyen de cette valeur de P que la correction relative à la différence des diamètres des cylindres s'introduit dans la construction de l'instrument.

Le fil C′ qui s'enroule sur la fusée S (fig. 2) étant assez long, subit des variations dont on doit tenir compte dans l'estimation des températures.

En général sa longueur sera d'au moins 4 mètres à $4^{m},50$ entre son point de tangence et la pointe du crayon.

Les changements de température du local pourront donc modifier la position de la courbe tracée et il faut introduire dans l'instrument un système *de compensation.*

En supposant que ce fil C' soit de métal dont le coefficient de dilatation α est connu, on aura pour l'acier, le cuivre et le fer les valeurs :

Cuivre : $\alpha = 0{,}000017$
Acier : $\alpha = 0{,}0000115$
Fer : $\alpha = 0{,}0000125$

Admettant que les plus grandes variations possibles dans la température de l'observatoire soient de 30 degrés, l'allongement L du fil pour les positions extrêmes serait :

Cuivre : $L = 4^{m},50 \times 30 \times 0{,}000017 = 2{,}295$ millimètres.
Acier : $L = 4^{m},50 \times 30 \times 0{,}0000115 = 1{,}552$ »
Fer : $L = 4^{m},50 \times 30 \times 0{,}0000125 = 1{,}687$ »

On peut régler le fil C' pour une température moyenne ce qui réduit de moitié l'écart maximum.

En choisissant un fil d'acier, le plus grand écart se réduit à

$$L = 0{,}776 \text{ millimètre.}$$

Cette longueur représente, à l'échelle où s'enregistrent les températures moyennes, une valeur de

0,0776 de degré centigrade.

Il est possible d'annuler totalement l'influence des variations de la température en fixant une des roues R, qui communiquent le mouvement au crayon, sur un support légèrement mobile.

Ce support est une verge composée de deux métaux comme la spire du thermomètre métallique de Bréguet.

Les flexions que subit cette tige sous l'influence des variations de la température, déplacent l'extrémité libre de cette tringle compensatrice.

C'est à cette extrémité que l'on a fixé la roue R.

Tout déplacement de la roue R entraîne un déplacement concomitant du crayon; on pourra donc calculer les longueurs de la tige compensatrice, de telle sorte que le déplacement de la roue R *compense exactement* l'allongement du fil.

Nous n'indiquerons qu'en passant la correction qui tient compte du poids de la couche du liquide volatil I, fig. 3.

Cette couche est éminemment variable suivant les cas, mais son influence numérique en millimètres de mercure est constante et se trouve comprise dans la première détermination du 0° de l'instrument.

Dans la mensuration des températures, la variation de l'épaisseur de cette couche du liquide ne modifie pas les chiffres trouvés, car le poids du liquide qui se transforme en vapeur continue à agir sur le ménisque à l'état gazeux.

Telles sont les principales corrections à apporter aux indications du thermographe, fonctionnant dans un observatoire, lorsqu'on désire obtenir la plus grande pression.

Chapitre IV

Construction et Épure de la courbe du Thermographe.

Dans la planche I, figure 2, nous avons donné un croquis de la disposition générale du thermographe ainsi que de l'agencement utilisé pour la communication du mouvement du mercure au crayon enregistreur.

Nous allons maintenant développer ce qui concerne particulièrement la courbe héliçoïdale de réduction, courbe qui est désignée par S dans la figure.

Dans la figure 4 du texte nous représentons la courbe S sur laquelle s'enroule le fil et la roulette R qui le reçoit tangentiellement.

La courbe S tourne autour de O pour centre ; la circonférence R pivote sur son axe O'.

Les mouvements angulaires de S et de R doivent être entre eux, à un facteur constant près, comme la force élastique d'une vapeur est à la température correspondante de saturation.

Désignons par : P la force élastique de cette vapeur à la température *t*, par *r* le rayon du tambour et par *h* le mouvement du crayon correspondant au degré centigrade.

Une variation élémentaire :

$$dP$$

de la force élastique fait varier la position d'un point du fil d'une quantité égale à :

$$\overline{OP} \times \frac{dP}{r}.$$

$\overline{OP}$ étant la perpendiculaire (fig. 4), abaissée du centre

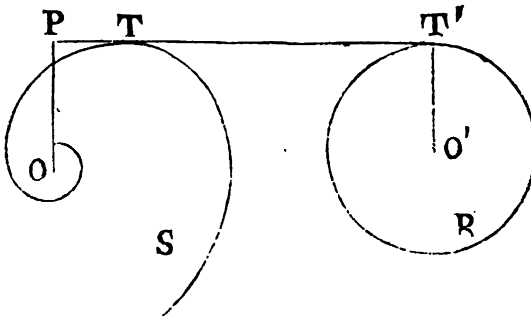


Fig. 4.

O du tambour sur le fil TT', tangent à la fois à la spirale S et la roulette R.

Cette variation est par hypothèse égale à :

$$h\,d\,t,$$

donc l'équation :

$$\overline{OP}\,\frac{dP}{r} = h\,d\,t$$

servira à déterminer la courbe S.

On en tire :

$$\overline{OP} = \frac{rhdt}{dP}.$$

L'équation générale que nous avons donnée entre t et P dans les chapitres précédents, nous permet de calculer les valeurs de P à toutes les températures avec la plus grande exactitude.

Pour calculer la longueur $\overline{OP}$, soit la perpendiculaire abaissée du centre de rotation O sur la tangente T T', (fig. 4), il faut obtenir la dérivée

$$\frac{dP}{dt}.$$

Pour cela on peut employer deux moyens :

Le premier consiste à différentier l'équation fondamentale.

Le second consiste à employer les différences première et seconde de P sorties d'un tableau numérique calculé au moyen de l'équation fondamentale.

On sait que la dérivée est sensiblement égale à la différence première augmentée de la moitié de la différence seconde.

Entre des températures de — 20° et + 40°, on obtient par ce moyen une exactitude suffisante si, dans ce tableau, P est calculé de degré en degré.

Voici le calcul des dérivées première et seconde.

Nous avons l'équation :

$$(1) \quad l\left(\frac{P'}{P}\right) = \frac{[\lambda' + (c-k)(t'-t)]\, 431 \times 1{,}293\, \delta\, 274\,(t'-t)}{10333\,[(274+t')^2 - (274+t')(t'-t)]}$$

On peut remplacer le dénominateur par l'expression :

$$10333\,(274+t')\,(274+t)$$

Posant les égalités auxiliaires suivantes :

$$A = \frac{431 \times 1{,}293\, \delta \times 274}{10333}$$

$$\varepsilon = \frac{c-k}{\lambda'}$$

l'équation devient :

$$l\left(\frac{P'}{P}\right) = \frac{A\lambda'}{274+t'}\;\frac{[1+\varepsilon(t'-t)]\,(t'-t)}{274+t}$$

Transformant cette équation logarithmique en une exponentielle, on a pour la valeur de P en fonction de t la relation :

$$(2) \qquad P = P'\, e^{-\frac{A\lambda'}{274+t'}\,\frac{[1+\varepsilon(t'-t)](t'-t)}{274+t}}$$

Or pour notre calcul nous désirons obtenir les dérivées première et seconde. Soit :

$$\frac{dP}{dt} \text{ dérivée première}$$

et

$$\frac{d^2P}{dt^2} \text{ dérivée seconde.}$$

Nous considérons P′ et t' comme des quantités constantes; ce sont les paramètres correspondant à la température fixe prise comme point de repère.

Différentions l'équation (2) par rapport aux variables P et t.

Nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$(3) \qquad \frac{dP}{dt} = -\frac{AP'\lambda'}{274+t'} e^{-\frac{A\lambda'}{274+t'} \frac{[1+\varepsilon(t'-t)](t'-t)}{274+t}} \times$$

$$\times \frac{d\left[\frac{[1+\varepsilon(t'-t)](t'-t)}{274+t}\right]}{dt}$$

En différentiant le dernier facteur du second nombre on a :

$$\frac{d\left[\frac{[1+\varepsilon(t'-t)](t'-t)}{274+t}\right]}{dt} = -\frac{1+2\varepsilon(t'-t)}{274+t} - \frac{t'-t}{274+t}\,\frac{1+\varepsilon(t'-t)}{274+t}$$

En substituant cette différentielle dans l'équation (3) on obtient l'équation (4)

$$(4)\quad \frac{dP}{dt} = A P' \lambda' \frac{1 + 2\varepsilon(t' - t) + \frac{(t' - t}{274 + t}[1 + \varepsilon(t' - t]}{(274 + t')(274 + t)} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{A\lambda'}{274+t'}\,\frac{[1+\varepsilon(t'-t)](t'-t)}{274+t}}$$

Pour simplifier cette équation posons les égalités suivantes:

$$274 + t' = T'$$

$$274 + t = T$$

et réduisons par quelques simplifications :

L'équation différentielle devient:

$$(5)\quad \frac{dP}{dt} = \frac{A P' \lambda'}{T'}\,\frac{T' + \varepsilon(T'^2 - T^2)}{T^2}\, e^{-A\lambda' \frac{(T' - T)[1 + \varepsilon(T' - T)]}{T\,T'}}$$

Dans cette équation le premier membre est la dérivée première cherchée, le second membre ne contient que des quantités connues et la variable T d'où dépend cette dérivée.

En effet :

A, P', λ', T', ε se rapportent à un état initial du liquide et de ses vapeurs.

T est la seule variable indépendante.

La valeur de la dérivée première

$$\frac{dP}{dt}$$

est donc donnée *explicitement.*

On peut calculer tabulairement ces dérivées sans *aucune interpolation empirique.*

Pour obtenir la dérivée seconde

$$\frac{d^2 P}{d t^2}$$

il nous faut différentier une seconde fois l'équation (5) en nous servant des mêmes abréviations.

On obtient l'équation (6)

$$(6) \qquad \frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{A P' \lambda'}{T'} e^{-A\lambda' \frac{(T'-T)[1+\varepsilon(T'-T)]}{T T'}} \times$$

$$\times \left[\frac{d\left[\frac{T'+\varepsilon(T'^2-T^2)}{T^2}\right]}{dt} - A\lambda' \frac{d\left[\frac{(T'-T)[1+\varepsilon(T'-T)]}{T T'}\right]}{dt} \right]$$

Pour simplifier l'équation (6) nous utiliserons deux identités que voici :

$$\frac{d\left[\frac{(T'-T)[1+\varepsilon(T'-T)]}{T T'}\right]}{d t} = -\frac{T'+\varepsilon(T'^2-T^2)}{T^2 T'}$$

et l'autre :

$$\frac{d\left[\frac{T'+\varepsilon(T'^2-T^2)}{T^2}\right]}{d t} = -\frac{2 T'(1+\varepsilon T')}{T^3}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (6) et réduisant, on obtient pour l'*expression explicite* de la dérivée seconde la formule (7)

$$(7)\quad \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{AP'\lambda'}{T^3T'^2}\Big[T'(1+\varepsilon T')(A\lambda' T - 2T') - A\lambda'\varepsilon T^2\Big] \times$$

$$\times\, e^{-A\lambda' \frac{(T'-T)[1+\varepsilon(T'-T)]}{TT'}}$$

Ces formules, contrôlées par des expériences directes faites avec les thermo-dynamomètres, nous ont permis de vérifier la dérivée première de la force élastique dont les valeurs sont contenues dans le tableau suivant :

TABLEAU

des différences premières et secondes de la force élastique des vapeurs de l'acide sulfureux

par rapport aux températures.

TEMPÉRATURE en degrés centigrades	DIFFÉRENCE première de P en millimètres de mercure	DIFFÉRENCE seconde de P en millimètres de mercure	DÉRIVÉE $\frac{dP}{dt}$	TEMPÉRATURE en degrés centigrades	DIFFÉRENCE première de P en millimètres de mercure	DIFFÉRENCE seconde de P en millimètres de mercure	DÉRIVÉE $\frac{dP}{dt}$
— 20		0,90	23,56	+ 10		1,88	64,60
	24,01				65,54		
— 19		0,93	24,47	+ 11		1,92	66,50
	24,94				67,46		
— 18		0,96	25,42	+ 12		1,96	68,44
	25,90				69,42		
— 17		0,99	26,39	+ 13		2,00	70,42
	26,89				71,42		
— 16		1,02	27,40	+ 14		2,03	72,43
	27,91				73,45		
— 15		1,05	28,43	+ 15		2,07	74,48
	28,96				75,52		
— 14		1,08	29,50	+ 16		2,11	76,57
	30,04				77,63		
— 13		1,11	30,59	+ 17		2,15	78,70
	31,15				79,78		
— 12		1,14	31,72	+ 18		2,18	80,87
	32,29				81,96		
— 11		1,17	32,87	+ 19		2,22	83,07
	33,46				84,18		
— 10		1,20	34,06	+ 20		2,26	85,31
	34,66				86,44		
— 9		1,23	35,27	+ 21		2,30	87,59
	35,89				88,74		
— 8		1,26	36,52	+ 22		2,35	89,91
	37,15				91,09		
— 7		1,29	37,79	+ 23		2,39	92,28
	38,44				93,48		
— 6		1,32	39,10	+ 24		2,43	94,69
	39,76				95,91		
— 5		1,35	40,43	+ 25		2,47	97,14
	41,11				98,38		
— 4		1,39	41,80	+ 26		2,52	99,64
	42,50				100,90		
— 3		1,42	43,21	+ 27		2,56	102,18
	43,92				103,46		
— 2		1,45	44,64	+ 28		2,60	104,76
	45,37				106,06		
— 1		1,49	46,11	+ 29		2,65	107,38
	46,86				108,71		
0		1,52	47,62	+ 30		2,69	110,05
	48,38				111,40		
+ 1		1,55	49,15	+ 31		2,73	112,76
	49,93				114,13		
+ 2		1,59	50,72	+ 32		2,78	115,52
	51,52				116,91		
+ 3		1,62	52,33	+ 33		2,82	118,32
	53,14				119,73		
+ 4		1,66	53,97	+ 34		2,86	121,16
	54,80				122,59		
+ 5		1,70	55,65	+ 35		2,91	124,04
	56,50				125,50		
+ 6		1,73	57,36	+ 36		2,95	126,97
	58,23				128,45		
+ 7		1,77	59,11	+ 37		3,00	129,95
	60,00				131,45		
+ 8		1,81	60,90	+ 38		3,04	132,97
	61,81				134,49		
+ 9		1,85	62,73	+ 39		3,09	136,03
	63,66				137,58		
+ 10		1,88	64,60	+ 40		3,13	139,14

Nous avons donc tous les éléments pour calculer la longueur O P (fig. 4) et pour pouvoir passer au tracé graphique de la courbe correctrice S.

Pour tracer S par tangentes, le procédé graphique suivant, qui se passe d'ailleurs de toute démonstration, nous parait être le plus avantageux, sous le rapport de la simplicité et de l'exactitude.

On commence par tracer les cercles T et R du tambour et de la roulette (fig. 5), dans la position relative qu'on veut leur donner.

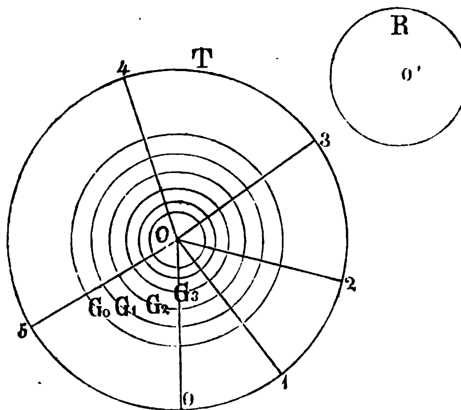


Fig. 5.

Sur la circonférence de T, on prend des arcs égaux aux valeurs de P et on subdivise ainsi le cercle en secteurs aux points *0, 1, 2, 3*... Calculant les valeurs de $\overline{OP}$ correspondant à ces points, on s'en sert comme de rayons pour tracer des cercles G_0, G_1, G_2...

Faisant tourner autour de O un cercle mobile de papier transparent (fig. 5 *bis*), superposé au tracé précé-

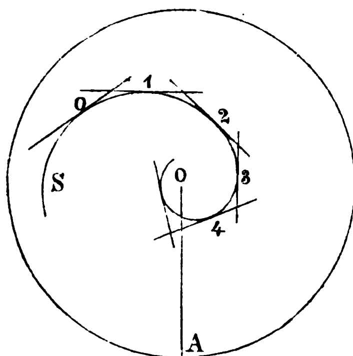


Fig. 5 *bis*.

dent, on fait constamment coïncider un rayon $\overline{OA}$ de ce cercle mobile avec les rayons des secteurs; puis, dans chaque position, on mène sur ce papier une tangente commune à R et au cercle G correspondant, que l'on aperçoit par transparence.

Ces droites figurent sur le cercle mobile un polygone qui est circonscrit à la courbe S cherchée.

Le procédé que nous venons d'exposer, qui n'est que l'application pure et simple d'un théorème de cinématique, nous fournit un tracé très correct de la courbe correctrice que nous emploierons dans le thermographe [1].

[1] D'ici à quelque temps, un thermographe, semblable à celui que nous avons décrit dans ce mémoire, fonctionnera à l'observatoire de

Ce tracé graphique remplit entièrement le but que nous nous étions proposé d'atteindre dans ce chapitre.

Nous verrons dans le mémoire suivant le développement plus complet de ce problème envisagé d'une manière générale.

la Ville de Genève. Nous nous faisons un plaisir d'offrir cet instrument à un établissement qui rend de si grands services à notre pays pour l'étude de l'astronomie et de la météorologie.

R. P.

DEUXIÈME MÉMOIRE

Méthode générale d'intégration continue d'une fonction numérique quelconque.

Applications à la transmission de mouvements variés.

CHAPITRE I

Théorème fondamental des courbes solidaires.

Dans le mémoire précédent, nous avons été conduits à envisager un cas particulier de la transmission d'un mouvement rotatoire en un autre mouvement rotatoire, au moyen d'un fil inextensible tangent à deux courbes mobiles autour d'axes fixes.

La relation qui existe entre le développement du fil, pour une position quelconque de ces courbes, est dictée dans le thermographe par une relation physique entre la tension maximum des vapeurs d'un liquide volatil et la température correspondante.

Il nous a paru intéressant d'approfondir davantage cette question et de sortir de ce problème de cinématique quelques rapports nouveaux entre les équations de courbes quelconques, lorsqu'on les astreint à la condition de solidarité au moyen d'un fil tangent et inextensible.

Nous appellerons dorénavant ce système de courbes reliées entre elles par un fil tangent et inextensible : *système de courbes solidaires.*

Afin de mieux fixer les idées, supposons deux courbes solidaires S et S′ (fig. 6).

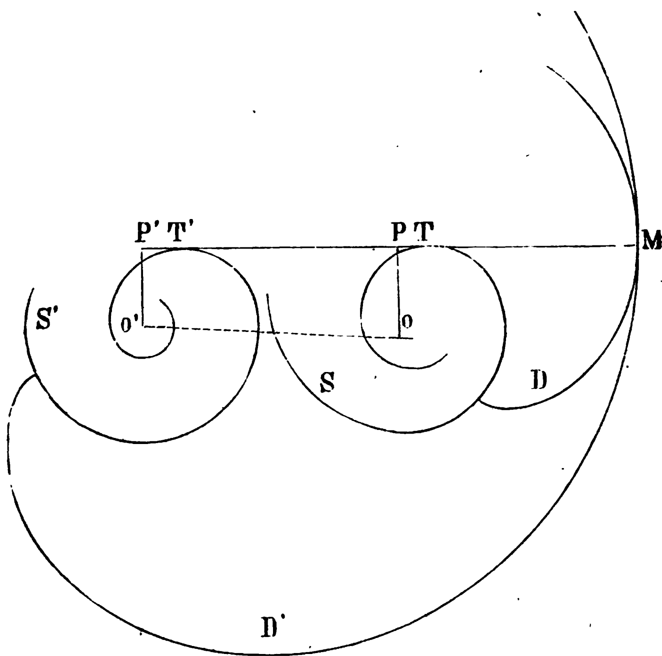


Fig. 6.

L'une S est représentée par l'équation:

$$S : F(x.y) = o$$

l'autre S' a pour symbole:

$$S' : F'(x'y') = o$$

La première tourne autour d'un axe O pour centre, la seconde pivote autour de O'.

Nous appellerons α et α' les angles de rotation des deux courbes à partir d'une position initiale quelconque.

Le fil inextensible tangent aux deux courbes est représenté par P' T' P T M.

Nous voulons connaître la relation qui existe entre

$$F(x, y)$$

et

$$F'(x', y')$$

lorsque l'on a l'équation :

$$F_1(\alpha) = F_1'(\alpha')$$

Représentons dans la figure 6 une position quelconque du système.

Soit un point M du fil situé sur la tangente commune à S et S'. Menons par ce point M des développantes D et D' aux courbes S et S'.

La courbe D est le lieu des positions que peut prendre ce même point M du fil déroulé autour de S supposée fixe; la courbe D′ est également la trajectoire du point M du fil déroulé autour de S′ supposée immobile.

Si maintenant on fait tourner simultanément les courbes S et S′ autour de O et O′, au moyen du fil T M T′, ce dernier reste constamment normal en M aux courbes D et D′, entraînées dans la rotation; et l'on peut voir que *pendant le mouvement, les courbes D et D′ rouleront l'une sur l'autre en restant en contact au point M du fil.*

En partant de ce principe on conçoit sans peine la conséquence suivante :

Si deux courbes D et D′, situées dans un même plan, tournent chacune autour de deux points fixes O, O′ du plan et sont astreintes à rester en contact continu l'une avec l'autre, les mouvements angulaires α et α' de l'une et de l'autre courbe ont constamment entre eux la même relation que si l'on remplaçait D et D′ par leurs développées S et S′, reliées entre elles par un fil tangent enroulé, flexible et inextensible.

On peut supposer que, la courbe S′ restant immobile dans sa position initiale, le point O se déplace d'un angle α' autour du centre O′, entraînant avec lui les courbes S et D, tandis que ces dernières font une rotation α autour de O.

Dans ces conditions, l'enveloppe des positions que prend D dans ce double mouvement, reste constamment normale à la tangente commune à S et S′.

Cette enveloppe n'est donc que la développante D' de S'.

Cette considération nous fournit un moyen de soumettre à l'analyse le mouvement produit par la rotation simultanée de S et S' autour de O et O'.

Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre II

Application de l'analyse au cas où l'on a deux courbes solidaires planes quelconques.

Prenons dans la figure 7 pour axe des abscisses la ligne OO' dans sa position initiale:

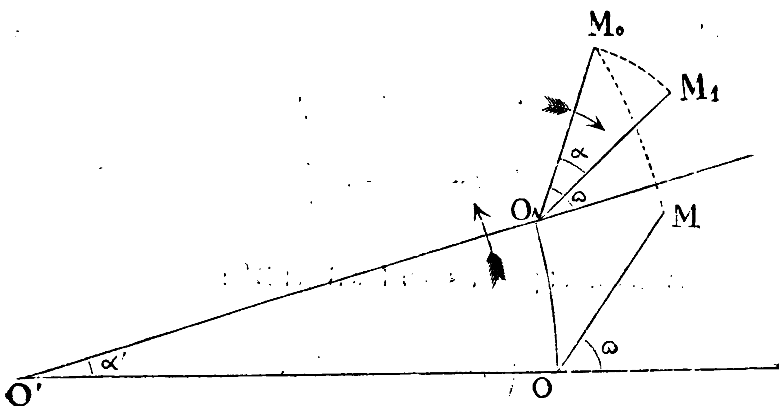


Fig. 7.

soient :

x, y, les coordonnées de S :

X et Y celles de D, rapportées à l'origine O.

x', y'

et

X', Y' celles de S' et D' rapportées a O' comme origine, dans la position initiale de ces courbes.

Il est entendu que les points (X, Y) (X'Y') sont situés sur les tangentes à S et S' en (x, y) et $(x'\ y')$, et que les longueurs de ces tangentes sont égales à des arcs s et s' comptés à partir des points de naissance des développantes.

Ces deux conditions, qui caractérisent la développante donnent :

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

$$s^2=(X-x)^2+(Y-y)^2$$

d'où

$$\text{(a)}\quad \left\{\begin{aligned} X-x &= -s\,\frac{dx}{ds}, \\ Y-y &= -s\,\frac{dy}{ds} \end{aligned}\right.$$

et pareillement pour les courbes S' et D' :

$$\text{(a')}\quad \left\{\begin{aligned} X'-x' &= -s'\,\frac{dx'}{ds'}, \\ Y'-y' &= -s'\,\frac{dy'}{ds'}. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant (fig. 7) le point M (X,Y) de D se déplace d'un angle α' autour de O' et d'un angle α autour de O, il vient en M_1, tandis que O est venu en O_1.

Soit ω l'angle que fait OM avec OO'.

O_1M_1 fait avec cet axe un angle égal à

$$\omega+\alpha'-\alpha;$$

d'autre part les coordonnées de O_1, rapportées à O', sont

$$l \cos \alpha'$$
$$l \sin \alpha'$$

en désignant par l la distance OO'.

Puis :

$$O_1 M_1 = O M = \sqrt{X^2+Y^2}.$$

Donc les coordonnées de M_1, rapportées à l'origine O' et à l'axe OO', sont :

$$X_1 = l \cos \alpha' + \sqrt{X^2+Y^2} \cos (\omega + \alpha' - \alpha)$$

$$Y_1 = l \sin \alpha' + \sqrt{X^2+Y^2} \sin (\omega + \alpha' - \alpha)$$

ou bien

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} X_1 = l \cos \alpha' + X \cos (\alpha'-\alpha) - Y \sin (\alpha'-\alpha) \\ Y_1 = l \sin \alpha' + X \sin (\alpha'-\alpha) + Y \cos (\alpha'-\alpha) \end{cases}$$

On déduit aisément de ces équations :

$$(b_1)\quad \begin{cases} X = -l\cos\alpha + X_1\cos(\alpha'-\alpha) + Y_1\sin(\alpha'-\alpha) \\ Y = -l\sin\alpha - X_1\sin(\alpha'-\alpha) + Y_1\cos(\alpha'-\alpha) \end{cases}$$

Ces deux dernières équations différentiées donnent après quelques simplifications :

$$(c)\quad \begin{cases} dX = \cos(\alpha'-\alpha)\,dX_1 + \sin(\alpha'-\alpha)\,dY_1 + l\sin\alpha\,d\alpha' + \\ \quad + Y(d\alpha' - d\alpha) \\ dY = -\sin(\alpha'-\alpha)\,dX_1 + \cos(\alpha'-\alpha)\,dY_1 - l\cos\alpha\,d\alpha' - \\ \quad - X(d\alpha' - d\alpha) \end{cases}$$

On peut désigner différemment les parties de ces expressions qui se rapportent à une variation des mouvements angulaires α, α' ou à une variation du point X_1, Y_1 de D.

On écrira

$$dX = d_\alpha X + d_{x1} X$$
$$dY = d_\alpha Y + d_{x1} Y$$

Pour obtenir l'enveloppe D′ des positions D_1 de D, nous ferons usage de la méthode ordinaire; elle consiste ici à différentier les équations par rapport au paramètre variable α et aux quantités qui dépendent de ce paramètre.

Un point X′, Y′ de D′ se trouve ainsi déterminé par l'intersection de deux positions très voisines de D_1.

Il faut donc faire varier les équations (b) ou (b_1) en posant

$$X_1 = X'$$
$$Y_1 = Y'$$

et en supposant ces dernières invariables.

Les variations des quantités X et Y sont alors réduites aux variations partielles :

$$d_\alpha X = l \sin \alpha \, d\alpha + Y (d\alpha' - d\alpha)$$
$$d_\alpha Y = - l \cos \alpha \, d\alpha = X (d\alpha' - d\alpha)$$

La normale à D au point M est tangente à S, qu'il y ait ou non un mouvement.

On a donc séparément :

$$\frac{d_\alpha Y}{d_\alpha X} \frac{dy}{dx} + 1 = o$$

$$\frac{d_{x'} Y}{d_{x'} X} \frac{dy}{dx} + 1 = o$$

ou bien

$$dy \, d_\alpha Y + dx \, d_\alpha X = 0,$$
$$dy \, d_{x'} Y + dx \, d_{x'} X = 0$$

Substituant les termes des expressions (c), dans cette équation, il vient après quelques réductions :

$$(Y\,dx - X\,dy)(d\alpha' - d\alpha) + (dx \sin\alpha - dy \cos\alpha)\, l\, d\alpha' = 0$$

$$dX' [dx \cos(\alpha' - \alpha) - dy \sin(\alpha' - \alpha)] +$$
$$+ dY' [dx \sin(\alpha' - \alpha) + dy \cos(\alpha' - \alpha)] = 0$$

Les équations (a) donnent :

$$Y\,dx - X\,dy = y\,dx - x\,dy$$

On a également :

$$dy'\, dY' + dx'\, dX' = 0$$

Nous obtenons donc d'une part :

$$(d)\ (y\,dx - x\,dy)(d\alpha' - d\alpha) + (dx \sin\alpha - dy \cos\alpha)\, l\, d\alpha' = 0$$

et d'autre part :

$$dy' [dx \cos(\alpha' - \alpha) - dy \sin(\alpha' - \alpha)] = dx' [dx \sin(\alpha' - \alpha) +$$
$$+ dy \cos(\alpha' - \alpha)]$$

Posant :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \varphi,$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tang} \varphi'$$

cette équation devient :

$$\operatorname{tang} \varphi' \cos(\varphi + \alpha' - \alpha) = \sin(\varphi + \alpha' - \alpha)$$

d'où

$$\varphi' = \varphi + \alpha' - \alpha$$

On peut écrire :

$$\sin(\varphi' - \alpha') = \sin(\varphi - \alpha)$$

c'est-à-dire :

$$\text{(e)} \qquad \frac{dy' \cos \alpha' - dx' \sin \alpha'}{ds'} = \frac{dy \cos \alpha - dx \sin \alpha}{ds}$$

Maintenant si l'on suppose que, S restant immobile, on fasse tourner la courbe S′ autour de O d'une manière semblable à celle dont nous avons envisagé le mouvement de S autour de O′, ou bien, ce qui revient au même, si l'on permute les accents indiqués sur la figure 7, opérant avec la même méthode et les mêmes raisonnements, on trouvera une formule semblable à la formule (d), mais dont les accents seront permutés ainsi que le signe de l. On aura ainsi l'équation (d′) :

$$\text{(d')} \quad (y'dx' - x'dy')(d\alpha' - d\alpha) + (dx' \sin \alpha' - dy' \cos \alpha') l d\alpha = o$$

On retrouverait aussi l'équation (e) identique à elle-même.

Nous pouvons maintenant réunir les résultats obtenus dans les équations (d), (e) et (d′) et écrire la triple équation suivante, qui présente une certaine symétrie :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\alpha' - d\alpha}{l\,d\alpha'}\,\frac{y\,dx - x\,dy}{ds} = \frac{dy\cos\alpha - dx\sin\alpha}{ds} = \\ & = \frac{d\alpha' - d\alpha}{l\,d\alpha}\,\frac{y'\,dx' - x'\,dy'}{ds'} = \frac{dy'\cos\alpha' - dx'\sin\alpha'}{ds'} \end{aligned} \right.$$

On peut encore introduire l'angle φ ou φ' que fait la tangente avec l'axe des x, et on a :

$$(2)\quad \frac{d\alpha'-d\alpha}{l\,d\alpha'}(y\cos\varphi - x\sin\varphi) = \frac{d\alpha'-d\alpha}{l\,d\alpha}(y'\cos\varphi' - x'\sin\varphi') =$$
$$= \sin(\varphi - \alpha) = \sin(\varphi' - \alpha')$$

Par l'emploi de coordonnées polaires, on simplifie encore la forme de l'équation.

Posant

$$x = u\cos\theta$$

et

$$y = u\sin\theta,$$

on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{du\sin\theta + u\cos\theta\,d\theta}{du\cos\theta - u\sin\theta\,d\theta}$$

d'où

$$(f)\qquad \operatorname{tang}(\theta - \varphi) = -\frac{u\,d\theta}{du},$$

$$\operatorname{tang}(\theta' - \varphi') = -\frac{u'\,d\theta'}{du'}$$

Et l'équation (2) devient

$$(3)\quad \frac{d\alpha' - d\alpha}{l\,d\alpha'}\,u \sin(\theta - \varphi) = \frac{d\alpha' - d\alpha}{l\,d\alpha}\,u' \sin(\theta' - \varphi') =$$
$$= \sin(\varphi - \alpha) = \sin(\varphi' - \alpha')$$

Il est aisé de voir que

$$u \sin(\theta - \varphi),$$
$$u' \sin(\theta' - \varphi'),$$

sont les perpendiculaires OP, O'P' (fig. 6).

Donc

$$\overline{\mathrm{OP}}\,d\alpha = \overline{\mathrm{O'P'}}\,d\alpha'$$

La relation

$$\varphi - \alpha = \varphi' - \alpha'$$

nous représente la condition de tangence commune du fil sur les deux courbes.

Si la longueur OO' devient infinie, on a simplement, pour l'une des courbes

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \alpha \\ \mathrm{tang}(\theta - \alpha) = -\dfrac{u\,d\theta}{du} \\ df = u \sin(\theta - \alpha)\,d\alpha \end{array} \right.$$

en désignant par f la distance d'un point du fil à l'axe des y, au signe près.

CHAPITRE III

Étude particulière du cas où l'une des courbes est un cercle.

On peut au moyen de l'équation (3) trouver, quand S est un cercle, les coordonnées de S' en fonction de α. Soit en effet

$$u = c$$

l'équation de la courbe S.

La formule (*f*) donne

$$\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

L'équation (3) devient

$$\varphi - \alpha = \varphi' - \alpha',$$

$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{c}{l}\left(1 - \frac{d\alpha}{d\alpha'}\right) = \sin(\varphi' - \alpha').$$

$$c\, d\alpha = u' \sin(\theta' - \varphi')\, d\alpha'$$

Différentiant la dernière équation on a :

$$\frac{du'}{u'} = \frac{d^2\alpha}{d\alpha} - \frac{d^2\alpha'}{d\alpha'} - \operatorname{cotg}(\theta' - \varphi')(d\theta' - d\varphi')$$

ce qui, joint à la 2[me] des équations (*f*) donne :

$$\operatorname{tang}(\theta' - \varphi') = \frac{d\varphi' \, d\alpha \, d\alpha'}{d\alpha \, d^2\alpha' - d\alpha' \, d^2\alpha}$$

On peut donc calculer successivement φ', $\frac{d\varphi'}{d\alpha}$, θ' et u', ainsi que nous allons l'indiquer.

Posons :

$$\alpha' = \psi(\alpha)$$

les formules précédentes se transforment comme suit :

$$\sin(\varphi' - \alpha') = \frac{c}{l} \cdot \frac{d\alpha' - d\alpha}{d\alpha'},$$

$$(5) \begin{cases} \sin(\varphi' - \alpha') = \frac{c}{l}\left[1 - \frac{1}{\psi'(\alpha)}\right] \\ \frac{d\varphi'}{d\alpha} = \psi'(\alpha) + \frac{c\,\psi''(\alpha)}{l\,[\psi'(\alpha)]^2 \cos(\varphi' - \alpha')} \\ \operatorname{tang}(\theta' - \varphi') = \frac{\psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)} \frac{d\varphi'}{d\alpha} \\ \operatorname{tang}(\theta' - \varphi') = \frac{[\psi'(\alpha)]^2}{\psi''(\alpha)} + \frac{c}{l\,\psi'(\alpha)\cos(\varphi' - \alpha')} \\ u' = \frac{c}{\psi'(\alpha)\sin(\theta' - \varphi')} \end{cases}$$

Si l est assez grand pour être supposé infini, ces équations deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi' = \psi(\alpha), \\ \tang(\theta'-\varphi') = \dfrac{[\psi'(\alpha)]^2}{\psi''(\alpha)}, \\ u' = \dfrac{c}{\psi'(\alpha)\sin(\theta'-\varphi')} \end{cases}$$

L'élimination de α dans ce cas est parfois possible. Soit par exemple :

$$\alpha' = \psi(\alpha) = e^{\alpha} = \psi'(\alpha) = \psi''(\alpha)$$

On aura :

$$\varphi' = \tang(\theta' - \varphi') = e^{\alpha},$$

$$u' = \frac{c\sqrt{1+e^{2\alpha}}}{e^{2\alpha}}$$

On en déduit :

$$\varphi'^2 = e^{2\alpha} = \frac{c}{2u'^2}(c + \sqrt{c^2 + 4u'^2})$$

et on peut ainsi éliminer α.

Si l est grand, sans qu'on veuille le supposer infini, on peut développer en séries les expressions (5).

Posant :

$$\frac{c}{l}\left[1 - \frac{1}{\psi'(\alpha)}\right] = \mu.$$

$$\frac{c}{l}\frac{\psi''(\alpha)}{[\psi'(\alpha)]^3\cos(\varphi'-\alpha')} = \lambda.$$

$$\frac{[\psi'(\alpha)]^2}{\psi''(\alpha)}(1+\lambda) = \frac{1}{\nu}$$

on calculera successivement, si ν est faible :

$$
(7) \left\{
\begin{aligned}
&= \frac{c}{l}\left[1 - \frac{1}{\psi'(\alpha)}\right] \\
&\lambda = \frac{c\,\psi''(\alpha)}{l\,[\psi'(\alpha)]^3}\left(1 + \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1.3}{2.4}\mu^4 + \ldots\right) \\
&\varphi' = \psi(\alpha) + \mu + \frac{1}{2}\,\frac{\mu^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\mu^5}{5} + \ldots \\
&\nu = \frac{\psi''(\alpha)}{[\psi'(\alpha)]^2}\,(1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \ldots) \\
&\theta' = \varphi' + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \nu = \varphi' + \frac{\pi}{2} - \nu + \frac{\nu^3}{3} - \frac{\nu^5}{5} + \\
&\quad + \frac{\nu^7}{7} \ldots \\
&u' = \frac{c}{\psi'(\alpha)}\sqrt{1 + \nu^2} = \frac{c}{\psi'(\alpha)}\left(1 + \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{2.4}\nu^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1.3}{2.4.6}\nu^6 - \ldots\right)
\end{aligned}
\right.
$$

On peut aussi avoir une expression approchée du rayon de courbure ρ'.

On a en général :

$$\rho' = \frac{ds'}{d\varphi'} = -\frac{du'}{d\varphi' \cos(\theta' - \varphi')}$$

Les formules (7) nous donnent aisément, en négligeant λ et ν^4.

$$\frac{du'}{u'd\alpha} = -\frac{\nu\psi'(\alpha)}{1+\nu^2}\left[1 + 3\nu^2 - \frac{\nu\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)\psi''(\alpha)}\right]$$

$$\frac{du'}{u'\cos(\theta'-\varphi')d\alpha} = -\psi'(\alpha)\left[1 + \frac{5\nu^2}{2} - \frac{\nu\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)\psi''(\alpha)}\right]$$

On a d'autre part

$$\frac{d\varphi'}{d\alpha} = \psi'(\alpha),$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{\rho'}{u'} = 1 - \frac{\nu\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)\psi''(\alpha)} + \frac{5\nu^2}{2}$$

Nous venons de voir que dans le cas où l'une des courbes solidaires est un cercle tournant autour de son centre, on peut toujours exprimer les coordonnées de l'autre courbe de façon que α et α' soient entre eux dans une relation donnée.

Nous avons ainsi établi toutes les formules qui nous paraissent nécessaires pour traiter les cas particuliers qui peuvent se présenter.

On peut donc, au moyen des équations, calculer autant de points que l'on veut. On obtiendra les tangentes au moyen du tracé décrit dans le 4[me] chapitre du 1[er] Mémoire; en associant ces deux méthodes, on peut obtenir un résultat très précis.

Le tracé graphique de la courbe peut encore être facilité par l'emploi du rayon de courbure, exprimé dans l'équation (8).

Enfin les développements en séries, exposés dans les équations (7), peuvent, lorsqu'on le désire, fournir un moyen de contrôle du degré d'approximation atteint par la méthode graphique.

En général, le calcul de ces séries pourra se borner à un ou deux termes, ce qui rendra ces formules avantageuses pour la pratique.

Prenons comme exemple le thermographe décrit précédemment; soient P_0 et t_0 deux valeurs initiales de la force élastique et de la température, on aura en général :

$$P = P_0 + r\alpha'$$

$$t = t_0 + \frac{c\alpha}{h}$$

$$\psi(\alpha) = \frac{P - P_0}{r}$$

$$\psi'(\alpha) = \frac{c}{hr}\frac{dP}{dt}$$

$$\psi''(\alpha) = \frac{c^2}{h^2 r}\frac{d^2P}{dt^2}$$

Nous employons ici les dérivées première et seconde de la force élastique.

Il suffit d'introduire ces expressions dans les équations (7)

Soit :

$$h = 0^m,010$$
$$r = 0^m,130$$
$$l = 0^m,140$$
$$c = 0^m,030$$

Au moyen des nombres lus dans la table calculée pour l'acide sulfureux d'après notre formule générale (page 64), nous prenons les valeurs :

$t = -20°$	$P_0 = 0$	$t = +40°$
$P = 0^m,481$		$P = 4^m,692$
$\frac{dP}{dt} = 0^m,02356$		$\frac{dP}{dt} = 0^m,13904$
$\frac{d^2P}{dt^2} = 0^m,00090$		$\frac{d^2P}{dt^2} = 0^m,00313$

Pour ces deux températures, —20° et +40° limites extrêmes du thermographe, on trouve par le calcul :

Pour $t = -20°$		Pour $t = +40°$	
$\psi(\alpha) =$	3,700	$\psi(\alpha) =$	36,092
$\psi'(\alpha) =$	0,544	$\psi'(\alpha) =$	3,210
$\psi''(\alpha) =$	0,065	$\psi''(\alpha) =$	0,216
$\mu =$	—0,180	$\mu =$	+ 0,147
$\lambda =$	0,084	$\lambda =$	0,0014
$\varphi' =$	3,519	$\varphi' =$	36,240
$\nu =$	0,198	$\nu =$	0,021
$\theta' =$	4,885	$\theta' =$	37,790
$u' =$	0,0563	$u' =$	0,00935

On peut réduire θ' en fraction décimale de l'angle droit, en le multipliant par

$$\frac{2}{\pi} = 0,6366,$$

ou bien on peut le transformer en degrés ordinaires, si l'on ne veut pas conserver la graduation incommensurable d'arcs de rayon pris pour unité.

Nous obtenons donc pour valeurs extrêmes de θ'

Pour $t = -20^c$:

$$\theta' = 3,110 \text{ quadrants},$$

et

Pour $t = +40^\circ$:

$$\theta' = 24,057 \text{ quadrants}.$$

Le développement angulaire de la courbe est donc ici d'environ 21 quadrants.

Elle aura par conséquent 5 spires et un quart.

Cet exemple suffit pour montrer comment on peut appliquer les formules à un cas particulier tel que celui du thermographe, où l'on trouve de petites valeurs pour λ, μ, ν.

Nous étudierons dans le chapitre suivant le cas où les quantités α et α' sont en relation différentielle l'une avec l'autre.

CHAPITRE IV

Application des théories précédentes à l'évaluation des intégrales.

Nous avons vu dans le second chapitre à quelles formules simples on arrive quand on considère le mouvement de deux courbes solidaires fort éloignées reliées par un fil tangent idéal.

Dans le cas où leur distance est infinie, nous avons été conduits à poser l'équation (4)

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi = \alpha \\ df = u \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha \\ \operatorname{tang}(\theta - \alpha) = -\dfrac{u\,d\theta}{du} \end{cases}$$

pour l'une des courbes,
et pour l'autre

$$(4')\quad \begin{cases} \varphi' = \alpha' \\ \operatorname{tang}(\theta' - \alpha') = -\dfrac{u'\,d\theta'}{du'} \\ df' = df = u' \sin(\theta' - \alpha')\, d\alpha' \end{cases}$$

Il est évident qu'au moyen de ces équations, on peut, si l'on connaît les courbes S et S', en opérant une certaine élimination, obtenir une équation différentielle dont

les variables α et α' sont entièrement séparées ; de sorte que la loi du mouvement est donnée par l'intégrale :

$$\int_0^{\alpha'} u' \sin(\theta' - \varphi')\, d\alpha' = \int_0^{\alpha} u \sin(\theta - \varphi\, d\alpha$$

ou par

$$\int_0^{\alpha'} \overline{O'P'}\, d\alpha' = \int_0^{\alpha} \overline{OP}\, d\alpha$$

Ainsi prenons pour une des courbes la spirale logarithmique

$$u = e^{-\theta}$$

L'équation (4) nous donne

$$\operatorname{tang}(\theta - \alpha) = 1$$

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\overline{OP} = e^{-\theta} \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

$$\overline{OP} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\alpha + \frac{\pi}{4} + k\pi\right)}$$

$$f = \int_0^{\alpha} \overline{OP}\, d\alpha = \pm \frac{e^{-\left(\alpha + \frac{\pi}{4} + k\pi\right)} - e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}}{\sqrt{2}}$$

$$f = \pm \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}}{\sqrt{2}} \left(e^{-\alpha} - 1\right)$$

k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Si $k = o$,

$$f = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left(1 - e^{-\alpha}\right) = 0{,}32239\left(e^{-\alpha} - 1\right)$$

Prenons pour l'autre courbe le cercle

$$u' = a \sin \theta'$$

de diamètre a, tangent en O à l'axe des x, on a

$$\operatorname{tang}(\theta' - \alpha') = -\frac{u'\,d\theta'}{du'} = -\operatorname{tang}\theta'$$

$$2\theta' = \pi + \alpha'$$

$$\overline{O'P'} = a\cos^2\frac{1}{2}\alpha' = a\,\frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$f = \int_0^{\alpha'} \overline{O'P'}\,d\alpha' = \frac{a}{2}(\alpha' + \sin\alpha')$$

Les mouvements angulaires de ces deux courbes seront donc liés par la relation

$$\frac{a}{2}(\alpha' + \sin\alpha') = 0{,}32239\,(e^{-\alpha} - 1)$$

$$\frac{\alpha' + \sin\alpha'}{e^{-\alpha} - 1} = \frac{0{,}64478}{a} = \text{constante.}$$

Au moyen de ce système on pourra toujours trouver des valeurs de α' correspondant à des valeurs données de α et satisfaisant à cette équation ; il suffira de faire tourner la spirale d'angles α et de voir de combien l'autre courbe tourne simultanément.

Cette dernière lecture donne les valeurs de α'.

Il peut arriver que

$$\int \overline{\mathrm{OP}} d\alpha,$$

$$\int \overline{\mathrm{O'P'}} d\alpha'$$

ne soient pas intégrables ; dans ce cas, un point du fil se meut d'une quantité f égale aux valeurs de ces intégrales ; les angles α' correspondent aux angles α. Si l'on met sur le fil un point de repère et que l'on place une échelle graduée, capable d'indiquer le déplacement de ce repère parallèlement à l'axe OO', la lecture à chaque instant de

$$l, \alpha \text{ et de } \alpha',$$

donne aussi bien la solution cinématique de l'équation différentielle à variables séparées

$$\mathrm{F}(\alpha)\, d\alpha = \mathrm{F}_1(\alpha')\, d\alpha'$$

que des intégrales

$$f = \int_0^\alpha \mathrm{F}(\alpha)\, d\alpha$$

ou

$$\int_0^{\alpha'} F_1(\alpha')\, d\alpha'.$$

Nous avons déjà vu qu'on obtenait $F(\alpha)$, $F_1(\alpha')$ en éliminant u et θ dans les équations (4) et en écrivant

$$F(\alpha) = u \sin(\theta - \alpha)$$

$$F_1(\alpha') = u' \sin(\theta' - \alpha')$$

Il n'est pas toujours possible de faire l'élimination quand on a une courbe donnée et qu'on cherche quelle est la forme de $F(\alpha)$ correspondant à cette courbe, mais il est intéressant de chercher à calculer la courbe de façon à ce que l'expression $F(\alpha)$ soit une fonction donnée de α.

L'équation (4) donne dans ce cas

$$u \sin(\theta - \alpha) = F(\alpha),$$

d'où

$$\frac{du}{u} = \frac{F'(\alpha)\, d\alpha}{F(\alpha)} - \operatorname{cotg}(\theta - \alpha)(d\theta - d\alpha)$$

$$\frac{du}{u} = -\operatorname{cotg}(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

d'où

$$(9) \qquad \begin{cases} \operatorname{cotg}(\theta - \alpha) = -\dfrac{F'(\alpha)}{F(\alpha)}, \\ u = \dfrac{F(\alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} = \sqrt{[F(\alpha)]^2 + [F'(\alpha)]^2} \end{cases}$$

Ces équations permettent de tracer une courbe telle que le déroulement du fil donne la valeur de

$$f = \int_0^\alpha F(\alpha)\, d\alpha$$

On calcule de même la courbe S' par la formule (9')

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} &\cot g\,(\theta' - \alpha') = -\frac{F_1'(\alpha')}{F_1(\alpha')}, \\ &u' = \sqrt{[F_1(\alpha')]^2 + [F_1'(\alpha)]^2} \end{aligned} \right.$$

On pourra se servir de ces deux courbes pour résoudre complètement le système

$$f = \int_0^\alpha F(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\alpha'} F_1(\alpha')\, d\alpha'$$

ou l'équation différentielle

$$F(\alpha)\, d\alpha = F_1(\alpha')\, d\alpha'$$

par rapport à α, α' et à f.

Dans le calcul des courbes solidaires, au moyen des équations (9) et (9'), on se servira de α et α' comme de paramètres auxiliaires, auxquels on donnera des valeurs prises à volonté et que l'on choisira convenablement.

Dans ce qui va suivre, nous considérerons la quantité f comme servant de point de liaison entre les valeurs de α et α'.

Nous n'emploierons qu'une seule courbe et chercherons à la déterminer de façon que f et α soient liées par une relation différentielle donnée

$$df = F(\alpha)\,d\alpha$$

La courbe sera alors calculée au moyen de l'équation (9).

Il est facile de réaliser un pareil système : il suffit en effet (fig. 8) de fixer la courbe par son point O, de manière que son plan soit vertical.

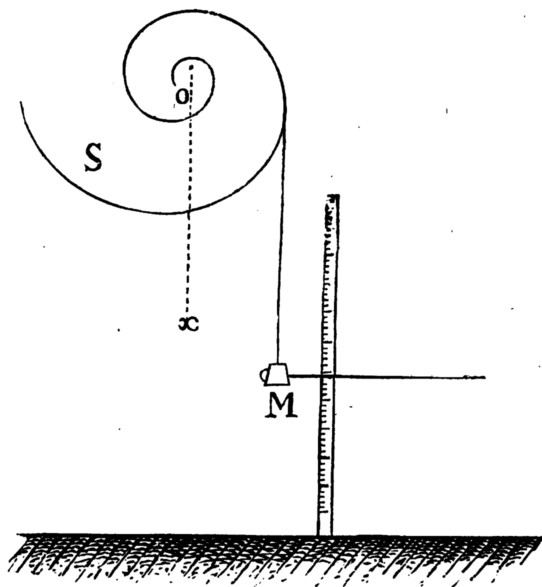


Fig. 8.

Le point de repère M du fil sera muni d'un léger

contre-poids et maintenu vertical, *de sorte que les valeurs de f sont données par la hauteur de ce repère au-dessus du sol.*

Dans ce système on peut regarder l'autre courbe comme un point situé à une distance égale au rayon de la terre, puisque toutes les positions du fil convergent vers ce point.

Pour employer convenablement soit l'équation (9), soit le procédé même que nous venons d'exposer, il importe de placer ici sous forme de propositions quelques résultats qui sont propres à simplifier les calculs.

1° *La forme de l'équation* (9) *est légèrement simplifiée si la fonction* $F(\alpha)$ *est l'exponentielle d'une fonction donnée* $\chi(\alpha)$.

En effet, si

$$F(\alpha) = e^{\chi(\alpha)}$$

l'équation (9) devient

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{cotg}(\theta - \alpha) = -\chi'(\alpha) \\ u = e^{\chi\alpha}\sqrt{1 + [\chi'(\alpha)]^2} = \dfrac{e^{\chi(\alpha)}}{\sin(\theta - \alpha)} \end{cases}$$

2° *Si une courbe calculée pour intégrer une fonction*

$$F(\alpha) = \frac{df}{d\alpha}$$

est suspendue par un autre point que le centre O pour lequel elle a été tracée, le déroulement du fil donnera une quantité différant de l'intégrale de

$$F(\alpha)\, d\alpha$$

d'une fonction trigonométrique simple de α.

Soit O_1 (fig. 9) le nouveau centre de rotation et $O_1 x_1$

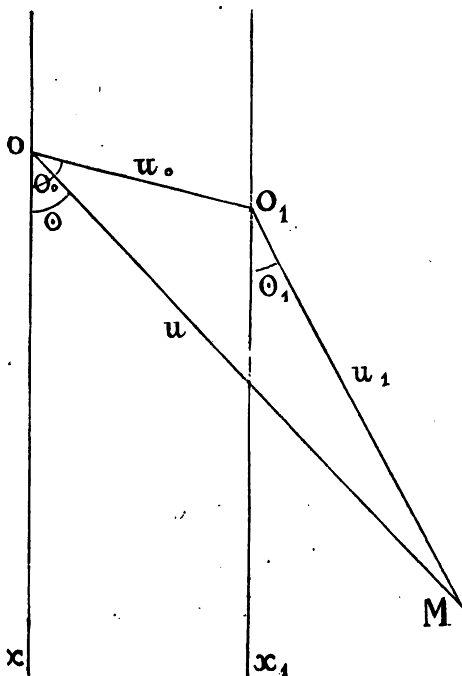


Fig. 9.

le nouvel axe des x.

Soient

u_1, θ_1 les nouvelles coordonnées d'un point M (u, θ), de la courbe

u_0 et θ_0 les coordonnées du point O_1 rapportées à O et O x.

Si f_1 est le déroulement du fil, on a :

$$d f_1 = u_1 \sin (\theta_1 - \alpha) \, d \alpha$$

tandis qu'on avait

$$d f = u \sin (\theta - \alpha) \, d \alpha = F (\alpha) \, d \alpha$$

Mais en projetant horizontalement et verticalement le triangle MOO_1, on a

$$u_1 \cos \theta_1 = u \cos \theta - u_0 \cos \theta_0 ,$$

$$u_1 \sin \theta_1 = u \sin \theta - u_0 \sin \theta_0$$

De sorte que

$$df_1 = [(u \sin \theta - u_0 \sin \theta_0) \cos \alpha -$$

$$- (u \cos \theta - u_0 \cos \theta_0) \sin \alpha] \, d \alpha$$

$$df_1 = df - u_0 \sin (\theta_0 - \alpha) \, d \alpha$$

(11) $f_1 = f - u_0 \cos (\theta_0 - \alpha) + u_0 \cos \theta_0$

Ce résultat permet de calculer à priori le mouvement

d'un cercle autour d'un point quelconque de son plan; on a en effet, s'il tourne autour du centre :

$$f = r\alpha$$

r étant son rayon,
de sorte que

$$f_1 = r\alpha - u_0 \cos(\theta_0 - \alpha) + u_0 \cos \theta_0$$

Pour le faire tourner autour d'un point de sa circonférence, nous ferons

$$u_0 = r,$$

$$\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$$

d'où

$$f_1 = r(\alpha + \sin \alpha)$$

relation déjà connue, pour un cercle tangent en O_1 à l'axe des x, et tournant autour de O_1,

3° *On peut, par approximations successives, en prenant comme point de départ la courbe calculée par la formule* (9) *ou* (10) *et représentée par la figure 8, calculer les points de deux courbes reliées par un fil, situées à une distance finie l et telles que pour toutes les positions, l'équation*

$$F(\alpha)\, d\alpha = F_1(\alpha')\, d\alpha'$$

soit satisfaite.

$F(\alpha)$ et $F_1(\alpha')$ sont deux fonctions données quelconques, qui ne sont pas nécessairement intégrables ni résolubles explicitement par rapport à α et α'.

Voici l'exposé de deux méthodes pour arriver à tracer ces courbes.

En premier lieu, on peut se servir directement de l'équation (3) du 2me chapitre, qui nous donne

$$\sin(\varphi-\alpha)=\frac{F(\alpha)}{l}\left(1-\frac{d\alpha}{d\alpha'}\right),$$

$$\sin(\varphi'-\alpha')=\frac{F_1(\alpha')}{l}\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}-1\right)$$

D'autre part

$$F(\alpha)d\alpha=F_1(\alpha')d(\alpha'),\ \text{donc}$$

$$\sin(\varphi-\alpha)=\sin(\varphi'-\alpha')=\frac{F(\alpha)-F_1(\alpha')}{l}, \tag{12}$$

$$\overline{OP}=F(\alpha),$$

$$\overline{O'P'}=F_1(\alpha')$$

On peut ici considérer α comme un paramètre auxiliaire; au moyen de deux courbes tracées pour l infini et placées à une grande distance, on obtient des valeurs de α' correspondant très approximativement avec diverses valeurs de α; ce seront ces valeurs qu'il faudra sub-

stituer dans l'équation (12) pour obtenir des valeurs de φ et φ' approchées.

Des équations (12) et (3) on déduit aisément

$$(13)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{d\alpha}=1+\frac{F(\alpha)}{l\cos(\varphi-\alpha)}\left\{\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)}-\frac{F_1'(\alpha')}{F_1(\alpha')}\right\},\\
&\frac{d\varphi'}{d\alpha'}=1+\frac{F_1(\alpha')}{l\cos(\varphi'-\alpha')}\left\{\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)}-\frac{F_1'(\alpha')}{F_1(\alpha')}\right\}\\
&\cot(\theta-\varphi)=-\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)}\,\frac{d\alpha}{d\varphi},\\
&\operatorname{cotg}(\theta'-\varphi')=-\frac{F_1'(\alpha')}{F_1(\alpha')}\,\frac{d\alpha'}{d\varphi'}\\
&u=\frac{F(\alpha)}{\sin(\theta-\varphi)},\\
&u'=\frac{F_1(\alpha')}{\sin(\theta'-\varphi')}
\end{aligned}\right.$$

On obtient ainsi les coordonnées de tous les points des deux courbes; on les tracera ainsi très exactement par approximations successives, puisqu'on possède ici des valeurs plus approchées de α'.

La seconde méthode n'est autre qu'une modification du procédé graphique de la figure 5.

Puisque par une des méthodes précédentes on peut toujours obtenir des valeurs α'_0, α'_1, α'_2, approchées de α' correspondant à des valeurs α_0, α_1, α_2, données

de α, rien n'empêche de calculer des valeurs approchées correspondantes de F (α), $F_1(\alpha')$.

Choisissant 2 points O, O′ (fig. 10), on portera à partir

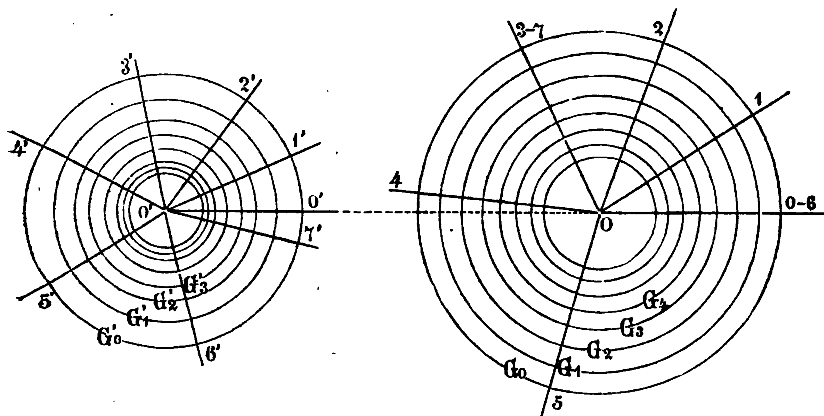


Fig. 10.

de OO′ des angles α_0, α_1, α_2.... avec O comme centre; α'_0, α'_1, α'_2,.. avec O′ comme centre.

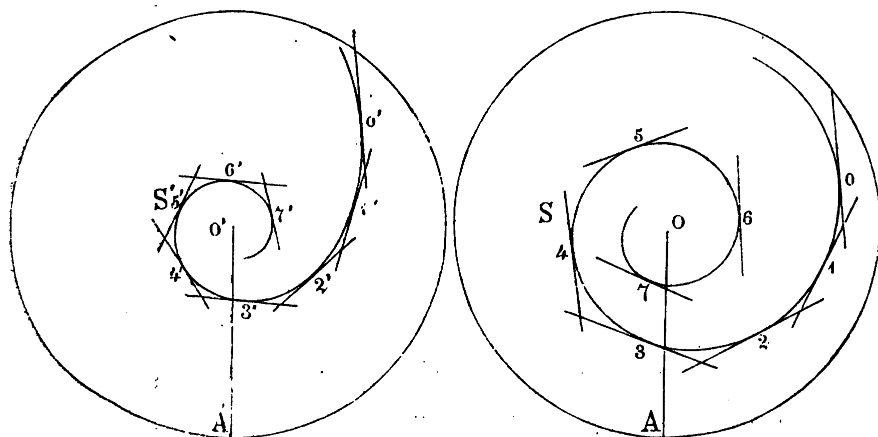


Fig. 10 *bis*.

Puis on tracera des cercles G_0, G_1,.. de rayons $F(\alpha_0)$, $F(\alpha_1)$,.... avec O comme centre, et des cercles G'_0, G'_1... de rayons $F_1(\alpha'_0)$, $F_1(\alpha'_1)$... axec O' comme centre.

On fera tourner simultanément deux cercles mobiles autour de O et O', de façon que deux rayons $\overline{OA}$, $\overline{O'A'}$ (fig. 10 bis) de ces cercles mobiles coïncident successivement et simultanément avec les rayons des secteurs O_0 et $O'_{0'}$, O_1 et $O'_{1'}$..... Menant dans chaque position des tangentes communes à G_0 et $G'_{0'}$, G_1 et G'_1...... on obtiendra par tangentes le tracé des courbes S et S'.

Après avoir indiqué ces deux méthodes pour déterminer au moyen de courbes approchées des courbes plus exactes, nous pouvons tenir notre troisième point comme démontré.

Nous terminerons ce chapitre en indiquant dans les figures 11 et 12 deux dispositions auxquelles on peut appliquer directement le tracé de la figure 5 et qui donnent les 3 valeurs correspondantes de f, α et α'.

Dans la figure 11, le fil arrive de S en S' après avoir passé sur deux cercles R et R'; les angles de rotation de S et S' satisfont à la relation différentielle pour laquelle elles ont été déterminées, tandis que l'intégrale de cette fonction différentielle est donnée par le déplacement rectiligne de l'index M placé entre les deux cercles.

Dans la disposition de la figure 12, l'un des cercles est supprimé et on remplace le fil par un ruban métalli-

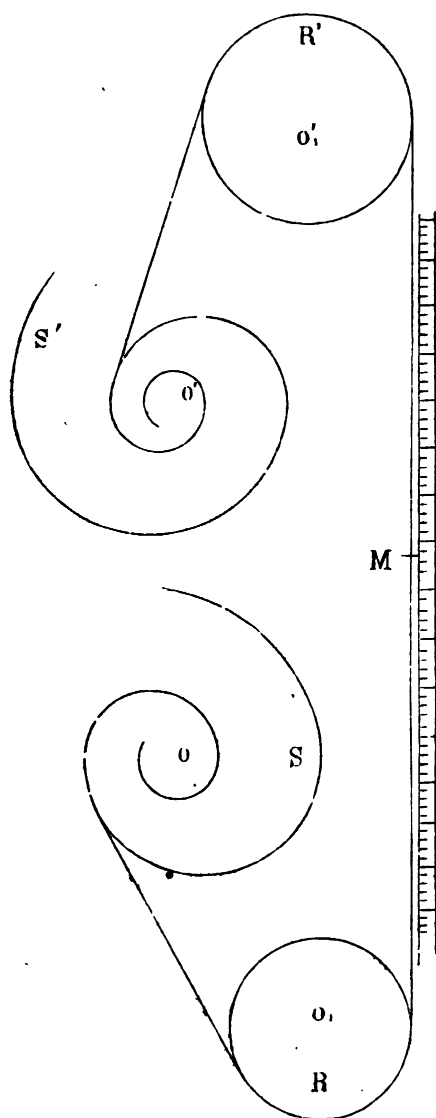


Fig. 11.

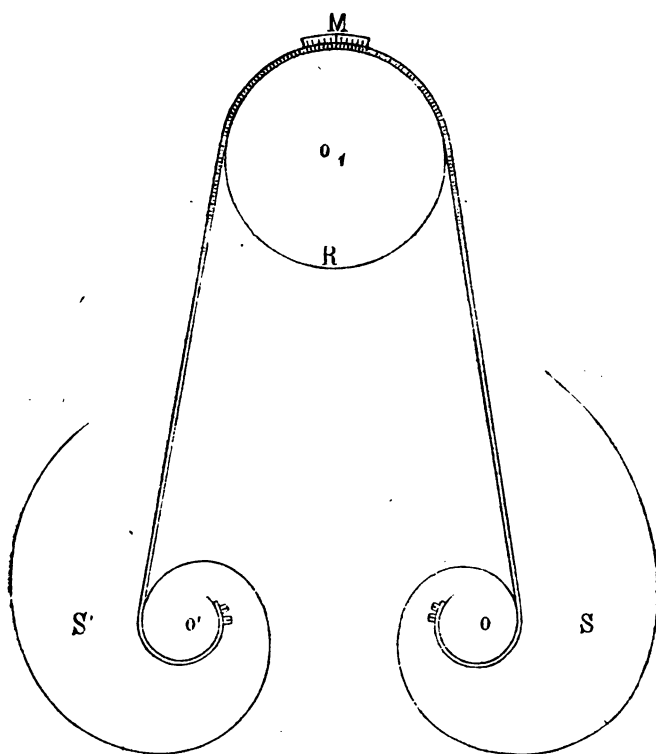


Fig. 12.

que gradué; au sommet M du cercle R se trouve un vernier fixe et la longueur du ruban qui passe au point M mesure l'intégrale f.

Nous avons indiqué ces dispositions, afin de montrer que l'on peut réaliser complètement le système traité dans ce chapitre; mais il est évident qu'on pourrait les varier à l'infini.

CHAPITRE V

Applications de la Méthode générale précédente à diverses fonctions numériques.

Nous nous proposons dans ce chapitre de donner quelques exemples complets et détaillés de l'emploi des formules et équations trouvées par l'analyse mathématique appliquée à l'étude des *courbes solidaires*.

Nous désirons obtenir quelques vérifications numériques suffisamment précises pour que l'usage de cette méthode générale puisse rendre des services en pratique et faciliter la résolution de quelques questions complexes de cinématique et de mécanique rationnelle.

Nous utiliserons ici directement les formules des pages précédentes.

Nous indiquerons également au moyen d'un exemple l'emploi d'un tracé graphique qui donne les intégrales sans avoir à considérer le mouvement des courbes. Ce tracé ne répond du reste qu'à un cas particulier de la méthode générale que nous allons décrire.

Cette méthode consiste à faire tourner dans un plan vertical une courbe, dont le calcul a été donné *in extenso* précédemment, et à déterminer pour chaque angle de rotation φ de la courbe le *déplacement vertical d'un point de*

repère marqué sur un fil à plomb qui se déroule ou s'enroule sur la courbe mobile.

Le tracé graphique supprime le mouvement de la courbe ainsi que le fil lui-même: On remplace les indications cathétométriques de la méthode générale par une construction géométrique assez simple, et par une lecture linéaire effectuée sur l'épure. Ces deux procédés sont destinés, non seulement à donner les intégrales que le planimètre pourrait difficilement fournir, mais encore à exprimer sous une forme continue et mécanique les variations des valeurs numériques de la fonction, lorsque l'angle φ *passe d'une limite inférieure á une limite supérieure quelconque.*

Dans chacun des exemples que nous envisagerons, nous avons commencé par tracer avec le plus grand soin la courbe représentée par la figure 8.

On se sert pour cela d'une des méthodes indiquées précédemment en cherchant dans chaque cas celle qui convient le mieux.

Nous reportons cette courbe sur un morceau de fort carton, bien homogène et aussi raide que possible.

On découpe exactement la courbe sur le trait de crayon de façon à la dégager de la plaque sur laquelle on l'a tracée.

C'est sur le dos de la courbe, c'est-à-dire sur l'épaisseur du carton que s'enroule ou se déroule le fil à plomb muni de son index.

Comme l'épaisseur du carton est très faible, à peine

$^1/_2$ millimètre, le fil se dégagerait constamment de cette surface si restreinte sur laquelle on l'enroule. Pour obvier à cet accident on colle sur les deux faces du carton du côté de la courbe, deux bords de papier fort qui laissent entre eux une petite gorge ayant 1 millimètre de profondeur.

Le fond de cette gorge est la courbe du carton, les joues servent uniquement à maintenir le fil à sa place.

On peut remplacer, si l'on veut, cette construction par le procédé suivant :

On découpe la courbe sur du carton fort et on l'emprisonne entre deux lames de verre percées toutes deux au centre de rotation.

Le fil alors est maintenu sur le dos de la courbe, tandis que la transparence du verre permet de voir comment le fil se comporte en chaque point de la courbe pendant le mouvement et les observations.

Le fil s'attache à la courbe vers un point extrême, on l'enroule sur la courbe et on suspend à sa partie inférieure un petit vernier muni d'un contre-poids assez léger (Voir planches II, III, IV, VI).

Pour pouvoir lire à chaque instant la valeur des angles de rotation φ, nous avons tracé un cadran divisé sur le plan vertical dans lequel se meut la courbe.

Le centre de ce cadran O coïncide avec le centre de rotation de la courbe.

Un vernier placé sur la courbe de carton permet de mesurer les déplacements angulaires avec toute l'exactitude désirable.

On peut ainsi mesurer l'angle φ en degrés, minutes et secondes.

On marque le zéro au cadran, lorsque la courbe mobile se trouve dans sa position initiale.

Cette position est tracée d'avance par un trait lorsque la courbe se construit.

Pour lire les déplacements verticaux de l'index fixé au fil qui se déroule sur la courbe, on peut se servir d'un cathétomètre, dont la lunette mobile tourne dans un plan horizontal.

Dans chaque position de l'index, la lecture sur la graduation verticale indiquera la valeur du niveau de cet index.

L'écart numérique, correspondant à deux observations, sera la valeur de l'intégrale entre les limites φ_0 et φ qui sont les angles de rotation de la courbe mobile.

Cette méthode de mesurer les déplacements de l'index est très exacte et donne facilement le vingtième de millimètre, seulement elle est un peu compliquée lorsqu'une grande précision n'est pas nécessaire.

On peut remplacer le cathétomètre et ses indications par une simple lecture directe faite sur un système de droites horizontales équidistantes.

On trace ces lignes parallèles sur une feuille de papier placée dans le même plan que la courbe mobile (Voir les planches II, III, IV, VI).

Les lignes sont fines, distantes d'un millimètre, et les graduations se lisent en marge, ce qui simplifie les observations.

L'index suspendu au fil de la courbe se compose d'un vernier au dixième de millimètre qui est maintenu appliqué contre les droites parallèles par l'action permanente d'un léger contre-poids.

Comme le plan est vertical, le frottement de ce vernier mobile contre la surface est insignifiant. Il ne saurait introduire aucune erreur sensible dans la lecture des niveaux successifs qu'occupera le zéro du vernier.

Quant à la *valeur intrinsèque* de l'unité millimétrique entrant comme expression de l'*intégrale cherchée*, elle correspond au paramètre qui a servi à la construction de la courbe mobile et toute erreur dans l'homogénéité des signes est facile à prévenir.

Ainsi, soit au moyen du cadran fixe et du vernier de la courbe, soit au moyen des lignes parallèles et de l'index du fil, on connaît avec précision l'angle φ et l'intégrale :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} F(\varphi)\,d\varphi = H \text{ Hauteur cathétométrique.}$$

Dans cette équation, φ_0 correspond à la position initiale et φ à la position quelconque.

H est la hauteur cathétométrique mesurée, soit directement avec l'instrument, soit au moyen des droites parallèles.

Telle est, d'une manière sommaire, la méthode pratique que nous avons employée pour déterminer certaines intégrales que le calcul se refuse à fournir et que l'on ne con-

naît qu'imparfaitement et d'une façon discontinue par la formule de Simpson.

Avant de passer à quelques problèmes numériques dans lesquels nous mettrons à exécution les méthodes décrites, nous appuierons sur les *causes d'erreur* que l'on doit avoir soin d'écarter autant que possible.

Nous pouvons grouper ces causes d'erreur sous les chefs suivants :

Erreurs dans le tracé de la courbe;

Erreurs dans le découpage du carton ou du métal;

Erreurs dans la graduation, soit du cadran, soit de la courbe;

Erreurs provenant d'excentricité par suite de l'agrandissement des trous du centre, ou du défaut de verticalité de la courbe;

Erreurs dues aux flexions du limbe de la courbe;

Erreurs par suite de l'extensibilité et de l'épaisseur du fil;

Erreurs de lecture.

Il est facile d'éviter toutes ces erreurs ou du moins d'amener leur influence à un minimum si petit que les chiffres obtenus sont presque rigoureusement exacts.

Le tracé de la courbe peut se faire avec des traits fins et les points se calculent assez près pour que la limite d'erreur soit l'épaisseur du trait de crayon.

Pour le découpage, les précautions sont assez nombreuses et varient suivant la nature de la plaque. Dans certains cas la lime douce peut rendre de grands services.

Nous nous sommes servis de ciseaux fins, en nous

astreignant à couper la courbe autant que possible dans l'axe du trait.

Pour les graduations, soit du cadran fixe, soit des verniers, on doit se servir du rapporteur, ou mieux encore d'une machine à diviser.

Les lignes parallèles horizontales peuvent être prises sur du papier quadrillé au millimètre, ou tracées également par la machine.

La flexion du limbe de la courbe peut être empêchée par le collage de quelques nervures, faisant relief sur le plan de la courbe. On les applique sur la face opposée à celle qui frotte sur le cadran.

Si la courbe est en métal ces flexions ne sont point à craindre.

Du reste en emprisonnant la courbe entre deux plaques de verre on supprime toute chance de flexion.

Le fil à plomb et le niveau permettent de vérifier la bonne orientation du système en place avant les observations.

On peut amincir les bords des verniers de telle sorte que l'on donne aux lectures des valeurs précises, indépendantes de l'obliquité du rayon visuel de l'observateur.

Il est facile de tenir compte de l'épaisseur du fil, car il suffit d'ajouter sa demi-épaisseur à la valeur de $\overline{OP}$, perpendiculaire abaissée du centre de rotation sur la tangente (fig. 6).

On peut en effet sans grande erreur considérer l'axe central du fil comme sa *ligne neutre*.

Enfin pour éviter les écarts de lecture qui proviendraient de l'extensibilité du fil, on le charge d'un petit poids constant, invariable pendant toutes les lectures.

Dans le procédé graphique que nous exposerons pour un exemple, une bonne partie de ces causes d'erreurs sont supprimées de fait, puisque le fil et le mouvement de la courbe sont remplacés par une épure au trait.

Cependant la contre-partie de ces avantages est grave, puisque l'intégrale lue ne correspond plus qu'à des limites fixes et définies, au lieu d'être quelconques comme dans le cas général.

Dans les exemples numériques développés ici, nous avons calculé des tables au moyen des lectures faites directement sur les verniers.

Nous avons donné à φ différentes valeurs équidistantes et mis en regard dans les tableaux les valeurs correspondantes de l'intégrale.

Dans une colonne voisine nous avons inscrit les mêmes valeurs de l'intégrale telles que le calcul intégral les donne :

Une troisième colonne comprend les écarts absolus, qui résultent de la différence des nombres fournis par le calcul avec ceux de l'expérience.

La dernière colonne contient les erreurs relatives.

PREMIER EXEMPLE

Ellipse.

Nous allons appliquer tout ce qui précède à l'ellipse en

donnant à dessein tous les intermédiaires du calcul pour que ce premier exemple nous serve dans les exercices suivants :

Prenons l'équation de l'ellipse rapportée à son centre:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Différentiant cette équation pour obtenir l'angle de la tangente avec l'axe des x, soit l'angle φ, nous avons

$$(2) \qquad \text{tang.}\,\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Cet angle φ est égal à l'angle de rotation de la courbe, puisque l'axe des x se déplace par rapport à la tangente de cet angle de rotation.

On tire de l'équation (2)

$$(3) \qquad \frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}\,\text{cotg.}\,\varphi$$

Nous joignons l'équation (3) à l'équation (1) et nous en déduisons aisément:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\,\text{cotg.}^2\,\varphi}} \\[2ex] y = \dfrac{-b^2\,\text{cotg.}\,\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2\,\text{cotg.}^2\,\varphi}} \end{cases}$$

Nous avons vu dans le chapitre II, formule (3) que la valeur de O P est toujours donnée par l'expression :

$$\overline{\mathrm{OP}} = y \cos \varphi - x \sin \varphi$$

Ici on a comme conséquence des équations (4) :

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

Posant pour la valeur de l'excentricité de l'ellipse la relation (5)

(5) $$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$$

Nous en déduisons pour O P la formule (6)

(6) $$\overline{\mathrm{OP}} = a \sqrt{1 - e^2 \cos \varphi^2}$$

Si, dans l'équation générale du chapitre II, nous faisons la longueur l infinie nous en déduisons :

$$\alpha = \varphi$$

et de plus (7)

(7) $$\int_0^\varphi \overline{\mathrm{OP}}\, d\varphi = f = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi$$

Cette intégrale représente une *fonction elliptique* de la 2e espèce.

Par conséquent le mouvement vertical de l'index du fil donnera la valeur numérique d'une *intégrale elliptique de deuxième espèce en prenant a pour unité.*

Nous avons l'identité suivante (8)

$$(8) \qquad \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}\; d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}-\psi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}\; d\psi$$

en posant :

$$(9) \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$$

Cette seconde intégrale est ainsi ramenée à la forme classique de l'intégrale de deuxième espèce.

Posons :

$$(10) \qquad \int_0^{\psi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}\; d\psi = \mathrm{E}(\psi)$$

nous en tirons :

$$(11) \qquad f = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

La formule (8) nous servira au calcul numérique d'un exemple particulier.

Prenons comme bases numériques:

$a = 100$ millimètres.
$e = \sin 45°$.

Cette ellipse est représentée en grandeur d'exécution à la planche II.

Son grand axe est A C.

Son petit axe B D.

Sur le pourtour de l'ellipse nous avons exécuté le cartonnage indiqué précédemment de manière à obliger le fil à s'enrouler sur le dos de la courbe.

Dans la position initiale on a

$$\varphi = 0$$

L'axe A C, soit l'axe des x, est vertical.

Le réseau de lignes horizontales placé au-dessous de l'ellipse est tracé sur une feuille de papier fixée ou collée contre le plan vertical qui porte la graduation du cadran. On donne au fil une longueur initiale telle que pour:

$$\varphi = 0$$

l'index M soit au zéro de l'échelle cathétométrique.

Le vernier de l'index M permet d'obtenir cette position initiale avec toute l'exactitude désirable.

Dans la planche II la position initiale de l'ellipse est représentée par un tracé pointillé.

On peut voir que le zéro du cadran correspond au zéro du vernier de la courbe, et que le zéro de l'échelle verticale touche le zéro du vernier de l'index M.

Nous faisons tourner la courbe d'un angle φ quelconque.

Supposons que cet angle soit positif dans la rotation de gauche à droite (analogue à celle des aiguilles d'une montre), pour toute valeur de l'angle φ nous lirons la dénivellation de l'index M.

Dans la planche II nous avons représenté en traits pleins la seconde position de l'ellipse, position qui correspond à un angle de :

$$\varphi = 40°$$

C'est-à-dire que l'axe des x s'est déplacé peu à peu, et que sa nouvelle position fait un angle de 40° avec la position initiale.

Nous lisons alors sur la graduation verticale la valeur de la dénivellation de l'index M correspondant à cet angle φ.

Le vernier nous permet de lire :

Dénivellation = 52,8 millimètres.

La planche II n'est dans ce cas que la reproduction identique d'une construction qui existe dans notre laboratoire, au moyen de laquelle nous avons obtenu directement les chiffres du tableau de l'ellipse.

L'unité ayant été arbitrairement choisie est représentée par :

$$a = 100 \text{ millimètres}$$

nous en déduisons pour l'intégrale elliptique donnée la valeur numérique :

$$(12) \qquad \int_0^{40} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \; d\varphi = 0{,}528$$

L'excentricité de cette ellipse étant égale à

$$e = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

cette intégrale doit s'écrire :

$$(13) \qquad \int_0^{40°} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \; d\varphi = \int_0^{40°} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{2}} \; d\varphi$$

Ainsi nous arrivons à la forme cherchée :

$$(14) \qquad \int_0^{40°} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{2}} \; d\varphi = 0{,}528$$

Maintenant, si nous comparons ce résultat numérique obtenu avec notre méthode au résultat fourni par l'appli-

cation des formules transcendantes relatives au calcul des fonctions elliptiques de la deuxième espèce, nous tombons sur une coïncidence absolue.

M. Bertrand, dans le 2e volume de son *Traité de Calcul différentiel et intégral*, donne une table des valeurs des intégrales E (ψ) d'où nous avons déduit l'expression :

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

pour toutes les valeurs de φ de cinq en cinq degrés.

Ces tables de M. Bertrand sont établies pour éviter aux mathématiciens de longs et laborieux calculs qui absorbent bien des heures de recherches avant de donner la valeur numérique de la fonction.

Si nous lisons dans ces tables les valeurs correspondant à :

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 40$$

nous trouvons pour l'intégrale :

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - 40^\circ\right) = 0{,}5279$$

Il y a presque identité entre les résultats fournis par les deux méthodes.

Cette première vérification suffit *pour prouver que la théorie de l'intégration continue d'une fonction numérique quelconque par l'emploi des courbes solidaires peut être considérée comme absolument exacte et qu'elle repose sur une propriété générale sans aucune exception.*

Nous avons fait des lectures directes, soit de l'angle φ, soit des valeurs cathétométriques de l'index M pour une foule de positions prises arbitrairement dans les quatre quadrants de l'ellipse.

Partout les coïncidences entre le calcul et l'observation sont aussi complètes que le comporte la rusticité des instruments dont nous nous sommes servis.

La plus grande erreur observée est de 2 dixièmes de millimètre.

Pour dresser le tableau suivant, nous avons donné à φ des valeurs successives variant de 5 en 5 degrés.

Nous avons fait les observations dans les 4 quadrants successivement avec la même valeur de φ.

Les intégrales trouvées sont placées sur la même ligne.

La cinquième colonne du tableau contient la moyenne arithmétique des 4 observations.

La sixième colonne renferme les valeurs calculées par les tables de l'ouvrage de M. Bertrand.

La septième colonne enregistre les écarts absolus, soit les différences en fraction de millimètre.

La huitième colonne contient les erreurs relatives, c'est-à-dire le degré d'approximation fourni par la méthode d'intégration que nous avons développée dans ce mémoire.

$$\text{Valeurs de} \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi$$

φ	Valeurs mesurées 1er quadrant	2me quadr.	3me quadr.	4me quadr.	Moyenne des valeurs mesurées	Valeurs calculées	Écarts absolus	Erreurs relatives
0°	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000	—	—
5°	0,062	0,064	0,062	0,059	0,0617	0,0617	0,0000	0,0000
10°	0,126	0,126	0,129	0,118	0,1247	0,1240	0,0007	0,0056
15°	0,191	0,190	0,188	0,187	0,1890	0,1871	0,0019	0,0102
20°	0,253	0,250	0,254	0,253	0,2525	0,2516	0,0009	0,0034
25°	0,320	0,321	0,319	0,318	0,3195	0,3177	0,0018	0,0057
30°	0,387	0,387	0,388	0,387	0,3873	0,3856	0,0017	0,0044
35°	0,458	0,458	0,456	0,457	0,4572	0,4557	0,0015	0,0033
40°	0,529	0,535	0,528	0,527	0,5298	0,5279	0,0019	0,0036
45°	0,605	0,604	0,604	0,602	0,6037	0,6024	0,0013	0,0022
50°	0,680	0,681	0,680	0,682	0,6808	0,6791	0,0017	0,0025
55°	0,755	0,763	0,760	0,759	0,7592	0,7578	0,0014	0,0018
60°	0,840	0,841	0,843	0,839	0,8407	0,8385	0,0022	0,0026
65°	0,917	0,930	0,926	0,916	0,9222	0,9210	0,0012	0,0013
70°	1,005	1,011	1,011	1,000	1,0068	1,0050	0,0018	0,0018
75°	1,090	1,095	1,097	1,087	1,0923	1,0903	0,0020	0,0018
80°	1,171	1,186	1,186	1,172	1,1787	1,1765	0,0022	0,0019
85°	1,260	1,270	1,266	1,262	1,2645	1,2634	0,0011	0,0009
90°	1,352	1,355	1,356	1,348	1,3527	1,3506	0,0021	0,0015

Moyenne des écarts : 0,001522.

Nous voyons par ce tableau complet que les valeurs données par les lectures numériques s'accordent sensiblement avec les résultats du calcul poussé jusque dans ses dernières limites de précision.

L'écart moyen de toutes les observations n'est que de 0,15 millimètre.

Nous allons donner quelques autres applications de

cette méthode d'intégration sans cependant nous étendre aussi longuement sur les calculs intermédiaires.

LE CERCLE

Prenons comme second exemple le cercle donné par l'équation

$$u = a \sin \theta$$

tangent en O à l'axe des x.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un pareil cercle déroule, en tournant autour de O, un fil dont la longueur est

$$f = \frac{a}{2} (\varphi + \sin \varphi) \tag{15}$$

φ étant l'angle de rotation et

$$\frac{a}{2}$$

le rayon du cercle.

Nous avons tracé (Pl. III) un cercle de 200^{mm} de diamètre, qui est en S dans sa portion initiale correspondant à

$$\varphi = 0°,$$

tandis que dans la position S' tracée en pointillé

$$\varphi = 10°.$$

A ces deux positions de la courbe correspondent deux positions de l'index, à savoir :

M et M'

En M, le zéro du vernier de l'index est sur la ligne zéro du réseau des droites parallèles.

En M', il marque

$$f = 34^{mm},8$$

D'après la formule (15), on pourra indiquer par le mouvement continu du fil, la variation continue de la fonction.

$$\varphi + \sin \varphi = \frac{f}{100^{mm}}$$

Au moyen de ce cercle, nous avons relevé quelques chiffres donnés par l'index, pour des valeurs de φ prises de 10° en 10 degrés, depuis

$$\varphi = 0$$

jusqu'à

$$\varphi = 180°$$

Calculant pour les mêmes angles les valeurs de

$$\text{arc } \varphi + \sin \varphi$$

nous avons pu mettre en parallèle dans le tableau suivant, les résultats calculés avec ceux obtenus directement avec notre courbe

Valeurs de $\varphi + \sin \varphi$

(Cercle mobile)

φ	**Valeur** mesurée	**Valeur** calculée	**Écarts** absolus	**Erreurs** relatives
0°	0,000	0,000	—	—
10°	0,348	0,348	0,000	0,0000
20°	0,691	0,691	0,000	0,0000
30°	1,021	1,024	0,003	0,0029
40°	1,337	1,341	0,004	0,0030
50°	1,636	1,639	0,003	0,0018
60°	1,905	1,913	0,008	0,0042
70°	2,156	2,161	0,005	0,0023
80°	2,377	2,381	0,004	0,0017
90°	2,570	2,571	0,001	0,0004
100°	2,728	2,730	0,002	0,0007
110°	2,856	2,860	0,004	0,0014
120°	2,960	2,960	0,000	0,0000
130°	3,034	3,035	0,001	0,0003
140°	3,088	3,086	0,002	0,0006
150°	3,121	3,118	0,003	0,0010
160°	3,137	3,134	0,003	0,0010
170°	3,146	3,141	0,005	0,0016
180°	3,148	3,142	0,006	0,0019
		Moyenne des écarts 0,0030		

Nous voyons dans ce tableau que les nombres mesurés ont à peu près deux décimales exactes.

L'écart va jusqu'à $0^{mm},8$ et la moyenne des écarts est de $0^{mm},30$.

Application au cercle du tracé graphique

Dans le commencement de ce chapitre nous avons parlé d'un tracé graphique pouvant au besoin remplacer l'emploi des courbes mobiles.

Comme exemple de cette application, nous avons évalué les valeurs de la fonction

$$\varphi + \sin \varphi$$

Pour cela nous avons tracé un cercle S (pl. V), dont le diamètre est

$$\overline{OP_0} = 200 \text{ millimètres.}$$

Par O, nous avons mené, de 10° en 10° des lignes

$$\overline{OP_{10}}\ ,\ \overline{OP_{20}}\ ,\ \overline{OP_{30}}\ ,\ \ldots\ldots\ \overline{OP_{170}}$$

et, perpendiculairement à ces lignes, des tangentes à la courbe S.

Dans ce tracé, le point initial est évidemment P_0 et les angles φ sont respectivement

$$\widehat{P_{10} O P_0}\ ,\ \widehat{P_{20} O P_0}\ ,\ \text{etc.}$$

C'est donc à partir de P_0 que nous avons gradué la circonférence du cercle S, ainsi que les différentes tangentes.

Sur la pl. V, une seule de ces dernières est indiquée

comme graduée; et par le fait, on peut mesurer par un moyen quelconque la longueur des tangentes rectilignes.

On peut lire sur cette tangente, au point de rencontre avec O P_{11}, le nombre

$$f = 164^{mm},6$$

qui, rapporté à l'unité de 100^{mm}, donne pour la valeur de la fonction

$$1,646 = \text{arc } 50^\circ + \sin 50^\circ$$

Au moyen du tracé représenté par la pl. V nous avons obtenu les résultats suivants:

Valeurs de $\varphi + \sin \varphi$

(Méthode graphique)

φ	**Valeurs** mesurées	**Valeurs** calculées	**Écarts** absolus	**Erreurs** relatives
0°	0,0000	0,0000	—	—
10°	0,3438	0,3481	0,0043	0,0124
20°	0,6903	0,6911	0,0008	0,0012
30°	1,0211	1,0236	0,0025	0,0024
40°	1,3412	1,3409	0,0003	0,0002
50°	1,6456	1,6387	0,0069	0,0042
60°	1,9158	1,9132	0,0026	0,0013
70°	2,1639	2,1614	0,0025	0,0012
80°	2,3869	2,3811	0,0058	0,0024
90°	2,5761	2,5708	0,0053	0,0021
100°	2,7342	2,7301	0,0041	0,0015
110°	2,8624	2,8596	0,0028	[illegible]
120°	2,9624	2,9604	0,0020	0,0007
130°	3,0350	3,0349	0,0001	0,0000
140°	3,0879	3,0863	0,0016	0,0005
150°	3,1171	3,1180	0,0009	0,0003
160°	3,1330	3,1345	0,0015	0,0005
170°	3,1387	3,1406	0,0020	0,0006
180°	3,1414	3,1416	0,0002	0,0001

Moyenne des écarts 0,00251

Dans cet exemple, la moyenne des écarts numériques est un peu moindre que précédemment ; elle n'est plus que d'un quart de millimètre.

Courbe logarithmique.

Comme troisième exemple, nous avons cherché à obtenir l'intégrale

$$f = \int \frac{d\varphi}{\varphi}$$

au moyen d'une courbe tournant autour de O et développant un fil vertical.

Pour tracer la courbe, nous avons calculé ses rayons vecteurs pour divers angles, cela au moyen des formules du chapitre IV, que nous rappelons ici en substituant φ à α

$$\operatorname{cotg}(\theta - \varphi) = F(\varphi)$$

$$u = \frac{F(\varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} = \sqrt{[F(\varphi)]^2 + [F'(\varphi)]^2}$$

Substituant ici

$$F(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$$

on a

(16) $$\text{tang}\,(\theta - \varphi) = \varphi$$

(17) $$u = \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2}$$

Nous avons, au moyen de ces formules calculé le tableau suivant:

Coordonnées de la courbe logarithmique.

φ	$\theta - \varphi$	θ	u
0,7	0,3888	0,835	2,491
0,8	0,4296	0,939	2,002
0,9	0,4665	1,039	1,661
1,0	0,5000	1,137	1,414
1,1	0,5303	1,231	1,229
1,2	0,5577	1,323	1,085
1,3	0,5825	1,411	0,973
1,4	0,6052	1,497	0,879
1,5	0,6257	1,581	0,803
1,6	0,6444	1,663	0,738
1,7	0,6615	1,744	0,682
1,8	0,6772	1,824	0,634
1,9	0,6916	1,902	0,595
2,0	0,7049	1,979	0,559
2,2	0,7284	2,128	0,500
2,4	0,7487	2,276	0,452
2,6	0,7663	2,422	0,413
2,8	0,7816	2,564	0,379
3,0	0,7952	2,705	0,351
3,5	0,8228	3,051	0,297
4,0	0,8440	3,390	0,258
4,5	0,8608	3,725	0,228
5,0	0,8743	4,057	0,204
6,0	0,8949	4,715	0,169
7,0	0,9097	5,366	0,145
8,0	0,9208	6,014	0,126
9,0	0,9294	6,658	0,112
10,0	0,9365	7,302	0,100

Dans la première colonne de ce tableau se trouvent

inscrits comme arguments les valeurs des arcs φ quand le rayon est l'unité.

Les chiffres de la deuxième colonne s'obtiennent au moyen de la formule (16)

$$\text{tang}\,(\theta - \varphi) = \varphi$$

Pour le calcul de ces valeurs, nous avons fait usage des nombres de la première colonne et des tables de Callet, qui donnent directement les tangentes naturelles des diverses parties décimales de l'angle droit.

Les chiffres inscrits dans la seconde colonne représentent donc des parties décimales de l'angle droit.

Les nombres de la troisième colonne sont les valeurs de θ exprimées par la même unité.

Pour obtenir θ ainsi défini, il faut réduire l'arc φ en parties aliquotes de cette unité et l'ajouter à $\theta - \varphi$ de la deuxième colonne.

Pour opérer cette réduction, il suffit de multiplier ces arcs φ par

$$\frac{2}{\pi} = 0{,}6366$$

Ainsi les nombres de la troisième colonne s'obtiennent en multipliant ceux de la première colonne par 0,6366 et en ajoutant ces produits aux nombres de la seconde colonne.

Quant aux nombres de la quatrième colonne, on les déduit directement de la formule (17)

$$u = \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2}$$

où φ représente un arc.

Nous voyons donc que, dans ce calcul, φ nous a servi de paramètre auxiliaire entre θ et u, ces dernières étant les coordonnées de la courbe.

En effet, notre but est ici bien moins de chercher dans cette courbe une relation graphique entre θ et u, que de la tracer afin d'en obtenir une relation cinématique entre φ d'une part et f de l'autre, c'est-à-dire entre

$$\varphi$$

et

$$\int u \sin(\theta - \varphi)\, d\varphi$$

ce qui nous a conduits dans le chapitre précédent à considérer u et θ comme des fonctions de φ.

Nous pouvons de cette manière choisir les limites entre lesquelles nous voulons intégrer

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi}$$

et prendre ainsi le développement de courbe nécessaire.

Enfin, nous désirions, au moyen d'une réduction facile à opérer, obtenir pour f non pas le logarithme népérien, mais le logarithme ordinaire de φ.

Pour cela, il faut établir, entre la longueur de l'unité

qui servira à tracer la courbe et celle de l'unité qui nous a servi à tracer le réseau de droites parallèles, une relation facile à déterminer.

Désignons par h une longueur métrique quelconque que nous prendrons comme unité pour le tracé du réseau.

Si f est le nombre d'unités lues sur le réseau, la longueur correspondante sera

$$fh$$

Soit r l'unité des valeurs de u, la longueur du fil déroulé sera

$$r\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi} = r \log \text{nép} \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

φ_0 étant la valeur initiale de φ.

De sorte que l'introduction des deux unités r et h nous conduit à l'équation.

$$fh = r \log \text{nép} \frac{\varphi}{\varphi_0} \tag{18}$$

Si la lecture de f doit nous donner le logarithme ordinaire de φ, il suffit de poser

$$f = \log \text{ord} \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

d'où

$$(19)\qquad h \log \text{ord} \frac{\varphi}{\varphi_0} = r \log \text{nép} \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

Telle est la condition à remplir pour que f indique le logarithme ordinaire de φ.

Cette condition se change aisément en la suivante :

$$(20)\qquad \frac{r}{h} = \frac{\log \text{ord} \frac{\varphi}{\varphi_0}}{\log \text{nép} \frac{\varphi}{\varphi_0}} = 0,43429$$

d'où

$$r = 0,43429\, h$$

Dans ce cas l'unité h représente le logarithme de 10.

Nous avons tracé la courbe S de la pl. IV en supposant

$$h = 200 \text{ millimètres}$$

d'où

$$r = 86^{\text{mm}},86$$

C'est à partir de la ligne $\overline{AC}$, prise comme axe des x, qu'ont été portées toutes les valeurs de θ du tableau précédent.

Dans la position S de la pl. IV, cet axe $\overline{AC}$ est horizontal; par conséquent cette position ne correspond point à

$$\varphi_0 = 0$$

mais bien à

$$\varphi_0 = 90°$$

La courbe S', indiquée en pointillé, est une autre position, pour laquelle

$$\varphi = 117°$$

de sorte que

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{117°}{90°} = 1,3$$

Dans les tables de logarithmes on trouve

$$\log 1,3 = 0,1139$$

Dans la planche IV, l'index M' permet de lire sur son vernier la valeur f.

$$f = 0,114$$

valeur presque identique à celle des tables.

Dans la planche IV, le zéro du réseau horizontal correspond à un angle

$$\varphi = 57°,3$$

angle dont l'arc est égal au rayon pris pour unité.

Pour obtenir par le mouvement entier de la courbe les logarithmes des nombres compris entre 0,7 et 10, il faut nécessairement rapporter au rayon pris comme unité tous les arcs des angles de rotation.

C'est en opérant de cette manière que nous avons obtenu les chiffres suivants, en choisissant du reste les angles φ complètement au hasard.

Valeurs de $\int \frac{d\varphi}{\varphi}$ *transformées en logarithmes ordinaires.*

Arc φ	**Lecture** de l'index	**Valeurs** mesurées de log φ	Log φ tabulaire	**Écarts** absolus	**Erreurs** relatives
0,760	$\bar{1}$,757	$\bar{1}$,8785	$\bar{1}$,8808	0,0023	0,019
0,882	$\bar{1}$,885	$\bar{1}$,9425	$\bar{1}$,9455	0,0030	0,055
1,051	0,038	0,0190	0,0216	0,0026	0,120
1,258	0,194	0,0970	0,0997	0,0027	0,027
1,335	0,247	0,1235	0,1255	0,0020	0,016
1,601	0,406	0,2030	0,2044	0,0014	0,007
1,789	0,506	0,2530	0,2526	0,0004	0,002
2,144	0,662	0,3310	0,3312	0,0002	0,001
2,453	0,776	0,3880	0,3897	0,0017	0,004
2,869	0,917	0,4585	0,4577	0,0008	0,002
3,705	1,142	0,5710	0,5688	0,0022	0,004
3,973	1,201	0,6005	0,5991	0,0014	0,002
4,932	1,393	0,6965	0,6930	0,0035	0,005
			Moyenne des écarts 0,00186 = 0^{mm},37		

La moyenne des écarts numériques est plus grande dans cet exemple que dans les exemples précédents. En effet, nous avons trouvé :

Pour l'ellipse mobile.................... 0,15
» le cercle mobile..................... 0,30
» le cercle du procédé graphique........ 0,25
» la courbe logarithmique.............. 0,37

Ce dernier chiffre est supérieur aux précédents, parce

que la courbe logarithmique n'a pas été tracée par un trait continu, comme le cercle, ni directement, comme l'ellipse, pour laquelle du reste les évaluations ont été répétées quatre fois. Cette courbe logarithmique, au contraire, a été calculée par points qu'il a fallu marquer au moyen de deux coordonnées, c'est-à-dire en entraînant deux chances d'erreurs.

Calcul de $\int e^{\text{tang}\,\varphi}\, d\varphi$

Nous allons maintenant donner le calcul d'une courbe destinée à représenter cinématiquement et d'une manière continue l'intégrale numérique

$$\int_0^{\varphi} e^{\text{tang}\,\varphi}\, d\varphi$$

Pour tracer cette courbe, nous avons employé la méthode des tangentes, représentées dans la figure (5) du premier mémoire.

Le calcul nécessaire pour ce tracé est celui de $\overline{\mathrm{OP}}$; et ici

$$\overline{\mathrm{OP}} = e^{\text{tang}\,\varphi}$$

Ce calcul se fait facilement par logarithmes. On a pour cela :

$$\log \overline{OP} = \text{tang } \varphi \times \log e$$

$$\log (\log \overline{OP}) = \log \text{tang } \varphi + \log (\log e)$$

Ici on a

$$e = 2,71828\ldots$$
$$\log e = 0,4342942$$
$$\log (\log e) = \bar{1},6377840$$

Pour variable φ, nous avons pris les angles de 0° à à 90°, de 5 en 5 degrés; le tableau suivant donne les valeurs de

$$e^{\text{tang } \varphi}$$

Calcul de $e^{\text{tang } \varphi}$

φ	log tang φ	log $e^{\text{tang } \varphi}$	$e^{\text{tang } \varphi}$
0°	infini négatif	0,00000	1,0000
5°	$\bar{2}$,94195	0,03800	1,0915
10°	$\bar{1}$,24632	0,07658	1,1928
15°	$\bar{1}$,42805	0,11637	1,3073
20°	$\bar{1}$,56107	0,15807	1,4390
25°	$\bar{1}$,66867	0,20251	1,5941
30°	$\bar{1}$,76144	0,25074	1,7813
35°	$\bar{1}$,84523	0,30410	2,0142
40°	$\bar{1}$,92381	0,36441	2,3142
45°	0,00000	0,43429	2,7183
50°	0,07619	0,51757	3,2928
55°	0,15477	0,62023	4,1709
60°	0,23856	0,75221	5,6521
65°	0,33133	0,93134	8,5377
70°	0,43893	1,19319	15,6023
75°	0,57195	1,62080	41,7638
80°	0,75368	2,46297	290
85°	1,05805	4,96398	92041
90°	infini	infini	infini

En jetant un coup d'œil sur ce tableau, on voit qu'à partir de 45°, les valeurs de $\overline{OP}$ croissent très rapidement, de sorte qu'après 70°, on ne peut guère obtenir de résultat.

En effet, si on représente l'unité par un centimètre, on aura

$$\varphi = 75° \quad \overline{OP} = 0^m,42$$
$$\varphi = 80° \quad \overline{OP} = 2^m,90$$
$$\varphi = 85° \quad \overline{OP} = 920^m$$

et l'on est en général limité par le format du papier que l'on veut employer.

Nous avons représenté par la planche VI la courbe tracée avec les chiffres du tableau précédent, en prenant un centimètre comme unité.

Cette courbe se termine pour une valeur de φ comprise entre 60° et 65°.

La planche VI représente deux positions de la courbe.

Dans la position initiale S,

$$\varphi = 0$$

La position S' tracée en pointillé correspond à

$$\varphi = 10°$$

Pour cet angle, le déplacement de l'index M est de $1^{mm},9$; ce qui donne :

$$\int_0^{10} e^{\text{tang}\,\varphi}\, d\varphi = 0{,}19$$

Nous n'avons pas relevé de chiffres au moyen de cette courbe; mais nous nous bornerons, pour terminer ce sujet, à donner dans un tableau quelques valeurs de l'intégrale, calculées au moyen de la formule de Simpson et des chiffres du tableau précédent.

Nous n'entrerons pas dans le détail de ce calcul qui du reste peut être court et précis et ne présente aucune difficulté.

Valeurs de $\int e^{\text{tang}\,\varphi}\, d\varphi$ *calculées par la formule de Simpson.*

Limites de φ	Intégrale	Limites de φ	Intégrale
0°-10°	0,19079	0°-10°	0,19079
10°-20°	0,22867	0°-20°	0,41946
20°-30°	0,27916	0°-30°	0,69862
30°-40°	0,35352	0°-40°	1,05214
40°-50°	0,47939	0°-50°	1,53153
50°-60°	0,74552	0°-60°	2,27705
60°-70°	1,61168	0°-70°	3,88873
70°-80°	13,75910	0°-80°	17,64783
80°-90°	Infini	0°-90°	Infini

Au moyen de ces chiffres, on peut vérifier l'exactitude des résultats fournis par les lectures de la planche VI.

CHAPITRE VI

Conclusions

Nous désirons exposer, à la fin de cette étude, les principales conclusions qui découlent naturellement de ce second mémoire et les déductions qui en sont un complément nécessaire, si l'on veut avoir un coup d'œil d'ensemble sur le sujet.

En effet, le but que nous avons poursuivi n'est pas simple, mais complexe; il ne se dégage spontanément, ni de l'interprétation des équations générales, ni des calculs numériques exposés dans le chapitre précédent.

C'est en considérant le calcul (dans son acception la plus générale) comme un enchaînement nécessaire et obligatoire des propriétés infinies des fonctions, lorsqu'on donne aux paramètres qui entrent dans ces fonctions des valeurs finies, c'est en considérant le calcul sous ce point de vue, que nous avons conçu l'idée de remplacer tous les intermédiaires numériques (qui ne sont que des auxiliaires) *par la liaison intime de courbes solidaires.*

Le calcul d'une fonction numérique est donc ramené à une lecture et les nombres lus sont constamment égaux aux variations de la fonction entre telles limites que l'on veut.

Pour permettre au lecteur de suivre les déductions successives qui nous conduisent à ce résultat, nous récapitulons à grands traits cette étude.

Le problème s'est présenté d'abord sous la forme d'un cas particulier : il s'agissait de construire une courbe de correction pour le thermographe.

Un tracé fort simple nous a donné cette courbe, mais il était nécessaire de trouver par l'analyse mathématique les équations générales de ces transmissions de mouvement pour pouvoir, dans chaque cas et dans chaque position, contrôler les tracés graphiques et discuter les particularités propres à chaque courbe.

C'est cette recherche analytique qui a fait l'objet des chapitres I et II.

Le chapitre II n'est que le développement du théorème fondamental des courbes solidaires.

Ces deux chapitres nous ont conduits à des résultats que l'on peut exprimer ainsi :

1° *Deux courbes solidaires peuvent être remplacées par leurs développantes roulant l'une sur l'autre sans que le mouvement angulaire relatif de ces courbes en soit modifié.*

2° *On peut toujours relier les coordonnées de deux courbes solidaires par trois équations entre quatre expressions symétriques deux à deux par rapport à ces courbes et aux angles de rotation de l'une et de l'autre.*

Dans le chapitre III, nous avons vu de quelle manière on doit procéder pour calculer les coordonnées de l'une des courbes quand l'autre est un cercle :

Dans le cas où l'une des courbes solidaires est un cercle donné, on peut toujours calculer les coordonnées de l'autre courbe, connaissant la relation qui relie les angles de rotation α et α'.

Ces trois premiers chapitres forment un tout qui suffirait parfaitement pour résoudre les problèmes analogues à celui du thermographe et vérifier les constructions cinématiques pour un point quelconque.

D'une manière générale, ces cas peuvent se représenter par les conditions suivantes :

1° *Disposition mécanique qui permet de transformer automatiquement les indications fournies par un instrument en une fonction déterminée de ces indications.*

2° *Disposition mécanique inverse de la précédente. C'est-à-dire : disposition mécanique permettant d'astreindre la marche d'un phénomène expérimental à être constamment en corrélation donnée avec une fonction déterminée, comme la durée du phénomène, la vitesse d'un corps, le poids ou l'étendue d'un autre corps quelconque.*

Dans les chapitres IV et V, nous avons appliqué l'équation générale du mouvement à deux courbes solidaires dont les équations différentielles ont leurs variables séparées :

$$(1) \qquad \overline{\mathrm{OP}}\, d\alpha = \overline{\mathrm{O'P'}}\, d\alpha' .$$

Nous avons montré que l'on pouvait toujours tracer et calculer les coordonnées des courbes solidaires S et S' de façon que les perpendiculaires :

$$\overline{OP} \text{ et } \overline{O'P'}$$

fussent des fonctions données des angles de rotation des courbes S et S'.

On obtient de cette manière, d'une façon continue, la relation entre α et α' indiquée dans l'équation (1).

Au moyen des formules du chapitre IV, on pourra toujours disposer deux courbes solidaires à une distance non infinie de telle sorte que l'on ait la relation :

$$F(\alpha)\, d\alpha = F'(\alpha')\, d\alpha'$$

Si nous appelons α_0 et α'_0 les valeurs initiales des angles de rotation des deux courbes, nous pourrons toujours avoir l'égalité (2).

$$(2) \qquad \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha'_0}^{\alpha} F'(\alpha')\, d\alpha'$$

Dans le chapitre V, nous avons développé quelques exemples numériques relatifs au cas *où l'une des courbes solidaires est située à une distance infinie.*

Nous l'avons supposée au centre de la terre, admettant que deux verticales voisines sont parallèles.

On peut, sans commettre une grande erreur, supposer que les deux courbes solidaires, tracées pour une distance

infinie, sont ensuite placées à une distance grande, mais finie.

Ainsi en reliant par un fil tangent deux des courbes présentées au chapitre V, on pourrait, sans aucun tâtonnement, résoudre par rapport à α ou α' une des équations suivantes :

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}\, d\alpha = \alpha' + \sin \alpha'$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}\, d\alpha = \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} e^{\operatorname{tang} \alpha'}\, d\alpha'$$

$$\alpha + \sin \alpha = \text{log. nép. } \frac{\alpha'}{\alpha'_0}$$

etc., etc.

Les résultats obtenus s'obtiendraient d'autant plus exactement, que les courbes seraient placées plus loin l'une de l'autre.

Lorsque les courbes se rapprochent, on pourra toujours opérer numériquement au moyen des ***approximations successives***.

Nous pouvons donc, au moyen des méthodes exposées précédemment, exprimer d'une manière continue l'égalité entre deux fonctions numériques quelconques de α et de α' selon l'équation (2).

Les quantités α_0 et α'_0 dépendent de la position initiale des courbes solidaires.

Posons

$$\int F(\alpha)\, d\alpha = F_1(\alpha) + \text{constante}$$

$$\int F'(\alpha')\, d\alpha' = F_1'(\alpha') + \text{constante}$$

et

$$F_1(\alpha_0) - F_1'(\alpha'_0) = i$$

L'équation (2) se ramène par ce fait à la forme suivante :

$$F_1(\alpha) - F_1'(\alpha') = i$$

Dans cette équation i est une *fonction paramètre* que l'on peut faire varier à volonté, tandis que les expressions :

$$F_1(\alpha)$$

et

$$F_1'(\alpha')$$

sont des fonctions numériques de α et de α'.

Maintenant considérons le cas où, au lieu de deux courbes solidaires, on en aurait plusieurs, toutes reliées par des fils inextensibles et tangents.

On introduirait par ce moyen un nombre quelconque de paramètres dans les équations générales exprimées par ces courbes.

Nous concevons donc la *possibilité matérielle de relier des fonctions de variables entre elles au moyen d'un système de courbes solidaires.*

Dans ces équations qui deviennent solidaires entrent autant de paramètres qu'on veut. De plus on peut faire varier ces paramètres à volonté sans modifier la forme même des courbes du système solidaire.

Pour faire varier ces paramètres, il suffira de déplacer une des courbes d'une certaine façon par rapport aux autres, de raccourcir ou d'allonger tel ou tel fil, pour faire varier à volonté tous les paramètres.

Nous arrivons donc à cette conclusion que nous soulignons :

Au moyen d'un système de courbes solidaires, l'équation qui relie les angles de rotation des courbes, ne contient plus que des VALEURS INDÉTERMINÉES DE CES PARAMÈTRES.

Cette équation sera donc uniquement une *fonction des variables et des paramètres auxquels on donne à volonté des valeurs quelconques.*

Nous allons montrer que ce système de courbes solidaires représente en germe : une *machine à calcul universelle.*

Nous pouvons rendre évidente cette conclusion par les considérations suivantes :

Désignons les paramètres quelconques par les lettres :

$$a\ .\ b\ .\ c\ .\ d.........$$

Et les angles variables de rotation par les lettres :

$$\alpha\ .\ \beta\ .\ \gamma\ .\ \delta\ .\ \varepsilon.........$$

Le système de courbes solidaires résoudra directement tous les systèmes d'équations de la forme : (3)

$$(3)\quad \begin{cases} F\,(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\delta\,\ldots\ldots\,a.b.c.d\ldots) = o \\ F_1(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\delta\,\ldots\ldots\,a.b.c.d\ldots) = o \\ F_2(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\delta\,\ldots\ldots\,a.b.c.d\ldots) = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

etc., etc.

Chaque fois que l'on donnera à a, b, c, etc., des valeurs spéciales qui resteront constantes pendant une même série de déterminations, la forme des équations (3) est numérique par rapport à

$$\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\delta\ldots\ldots$$

Mais les paramètres a, b, c, d étant constants pendant que les angles :

$$\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\delta,\ \text{etc.}$$

varient simultanément, on peut dire que les équations (3) *renferment des fonctions analytiques quelconques de :*

$$\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\delta,\ \text{etc.}$$

dont les paramètres

$$a\,.\,b\,.\,c\,.\,d,\ \text{etc.}$$

sont les constantes.

C'est en étudiant les systèmes de courbes solidaires sous ce point de vue qu'on pourra probablement poser les éléments de la construction d'un appareil destiné à fournir à volonté les valeurs numériques de diverses fonctions d'une variable contenant un certain nombre de constantes.

Avec un système semblable, on obtiendrait sans aucune difficulté les intégrales elliptiques, par exemple, quand l'excentricité e serait quelconque.

On ne devrait nullement calculer de nouvelles courbes; on n'aurait qu'à déplacer le centre de rotation ou le point de fixation du fil inextensible.

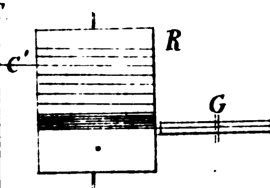
Nos deux derniers chapitres fournissent les données suffisantes, comme méthodes, tracés et formules pour faciliter la réalisation pratique d'un semblable instrument.

Au moyen des développements en série, il sera facile de modifier à volonté la distance des centres de rotation des diverses courbes, tout en maintenant les mêmes relations entre α et α'. Les corrections dans le tracé des courbes solidaires seront aisément opérées.

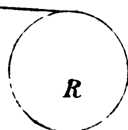
C'est cette possibilité de construire *une machine à calculer universelle* qui résume, pour ainsi dire, tous les résultats obtenus dans les chapitres IV et V et c'est là aussi notre dernière conclusion.

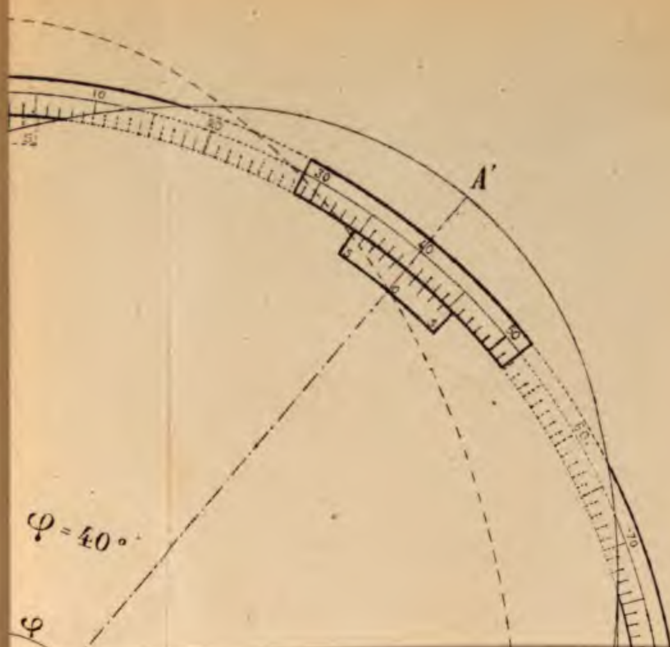
RAOUL PICTET,
GUSTAVE CELLÉRIER.

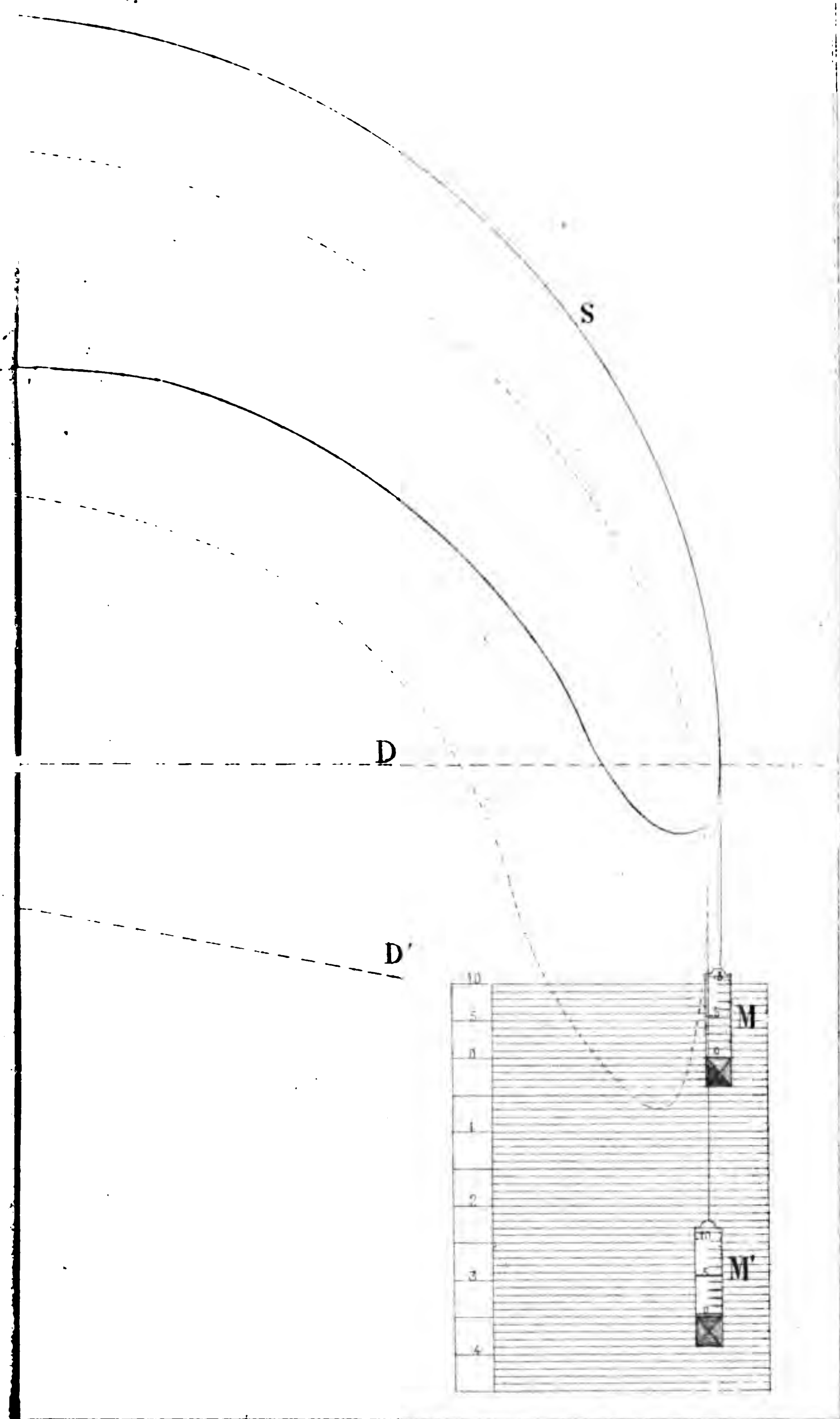
TABLE DES MATIÈRES

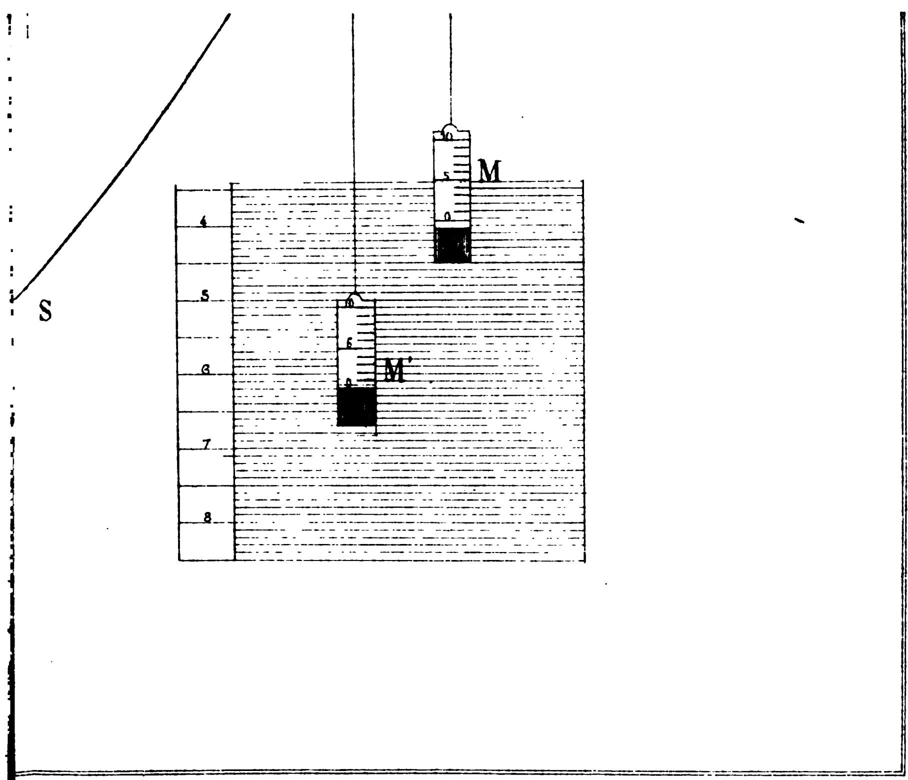


(Plan)

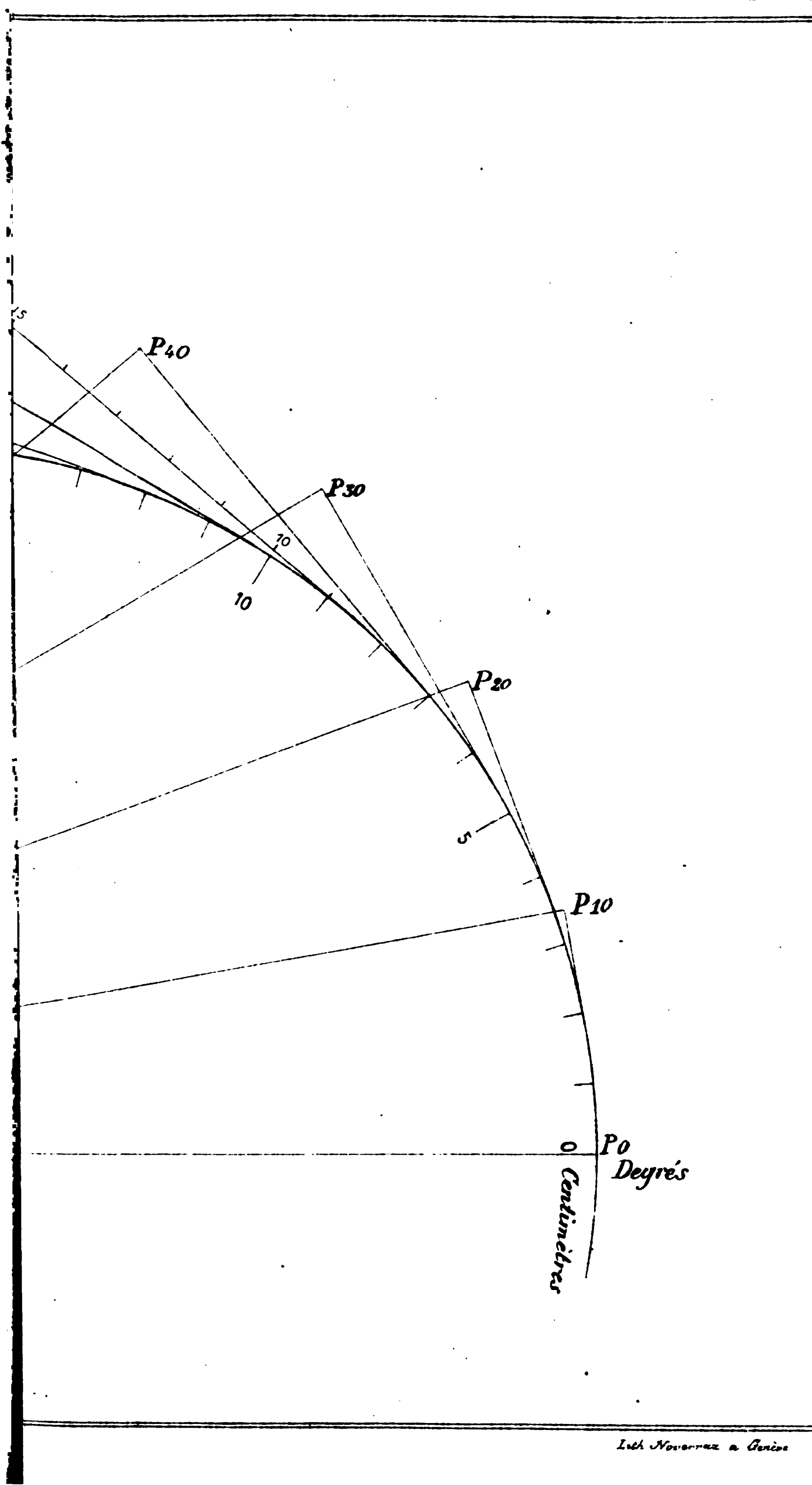



A'
φ = 40°
φ


S
D
D′
M
M′
10
5
0
1
2
3
4



Lith. Noverraz à Genève.



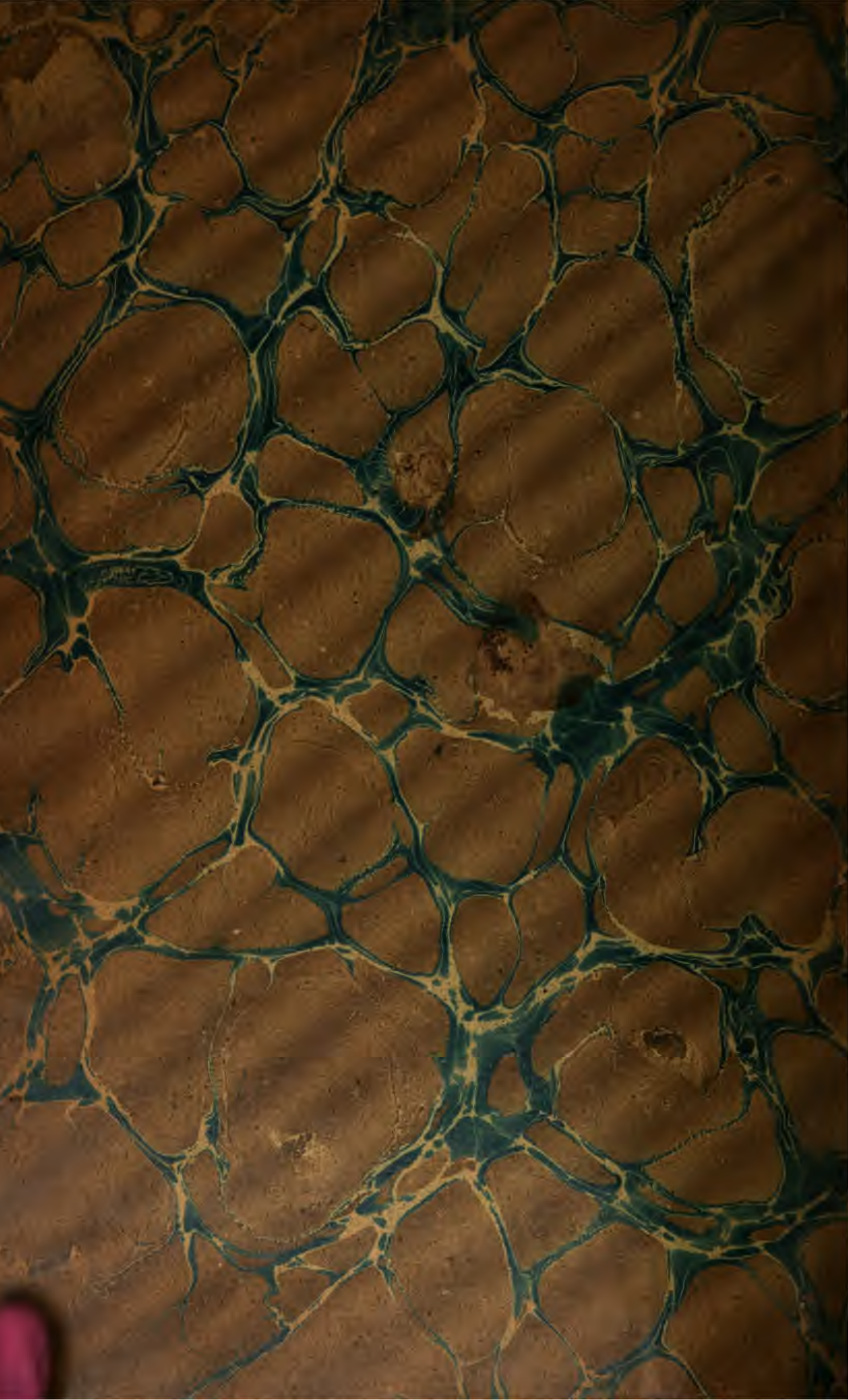
Lith Noverraz à Genève

S

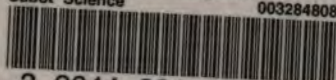


DU MÊME AUTEUR :

Mémoire sur la liquéfaction de l'oxygène, la liquéfaction et la solidification de l'hydrogène et sur les théories des changements des corps. 1 vol. in-8°, 107 pages avec 3 grandes planches, 1878 . . . . 3 fr. —






Math 3008.79.7
Methode generale d'integration
Cabot Science
003284808
3 2044 091 887 414